ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 27 JUIN 1921.

PRÉSIDENCE DE M. GEORGES LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Note (¹) de M. **Riquier.**

I. Dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, nous nommerons *figure* un ensemble de *points* défini par un système d'équations reliant les *n coordonnées*, réelles ou imaginaires, $x, y, \ldots$; point *ordinaire* d'une figure un point tel, que, dans un voisinage suffisamment rapproché du point, la figure puisse être définie à l'aide d'un système *réduit* d'équations normalement résolubles. Nous bornant à la considération exclusive de ce voisinage, et supposant tour à tour que le système réduit comprenne 1, 2, 3, ... équations, nous dirons, suivant le cas, que la figure est à $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... *dimensions*. Deux systèmes réduits numériquement équivalents, et, par suite, nécessairement composés d'un même nombre d'équations, définissent deux figures identiques. Si, désignant par p et p' deux entiers différents, on suppose que deux systèmes réduits, S et S', comprennent respectivement p et p' équations, et que le premier, S, soit une conséquence numérique du second, S', on a nécessairement $p < p'$, d'où $n-p > n-p'$, et la figure à $n-p'$ dimensions que définit S' sera dite *située sur* la figure à $n-p$ dimensions que définit S; inversement, la figure S sera dite *contenir* la figure S'.

Une figure à $n-p$ dimensions, définie par un système réduit de p équations, peut encore se représenter à l'aide d'un groupe de n formules égalant

---

(¹) Séance du 20 juin 1921.

les n coordonnées $x, y, \ldots$ à n fonctions analytiques et régulières de $n-p$ arbitraires, de telle façon que $n-p$ de ces formules, convenablement choisies, soient résolubles par rapport aux arbitraires : de ces deux modes de représentation, le premier sera qualifié de *réduit*, le second de *paramétrique*.

II. Considérons deux figures ayant un point commun, ordinaire pour chacune d'elles; désignons par $n-p$, $n-r$ leurs nombres respectifs de dimensions, et supposons $n-p \geqq n-r$. Les deux figures étant, dans le voisinage de ce point initial, représentées, la première (celle à $n-p$ dimensions), suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

la seconde (celle à $n-r$ dimensions), suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$x = \xi(s, t, \ldots), \quad y = \eta(s, t, \ldots), \quad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(1) \quad \begin{cases} f_1[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots] \end{cases}$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par g un entier positif ou nul, si les fonctions (1) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n-r$ variables $s, t, \ldots$) jusqu'à l'ordre g inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $g+1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir au point considéré un *contact d'ordre g*.

III. Soient $x, y, \ldots$ et $u, v, \ldots$ deux groupes de variables, en contenant respectivement h et k : si, dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

deux figures à h dimensions contiennent l'une et l'autre une même figure à $h-q$ dimensions ($0 \leqq q \leqq h$), et si, en tout point de cette dernière, elles ont l'une avec l'autre un contact proprement dit (c'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro), elles seront dites avoir l'une avec l'autre, suivant cette dernière, un *raccordement de genre h — q*.

Supposons actuellement qu'une famille, $\mathfrak{F}_h$, de figures à h dimensions,

dépendant des q paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, soit définie à l'aide d'un système de k équations entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q$ (et que ce système soit, comme de raison, résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées, $u, v, \ldots$ par exemple). On peut se proposer de rechercher s'il existe quelque figure fixe à h dimensions avec laquelle chacune des figures $\mathfrak{F}_h$ présente un raccordement de genre $h-q$: ce problème, qui dépend d'un système de $k(q+1)$ équations finies à $k+q$ fonctions inconnues, n'est pas toujours possible ; en supposant qu'il le soit, la figure fixe obtenue se nommera l'*enveloppe* des figures $\mathfrak{F}_h$.

IV. Supposons qu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des h variables indépendantes $x, y, \ldots$, soit résolu par rapport à un groupe de dérivées (premières) de $u, v, \ldots$. Pour disposer nettement les équations d'un système de cette espèce, on peut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables $x, y, \ldots$ et les colonnes aux inconnues $u, v, \ldots$, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x) : on obtient ainsi une sorte de damier où les cases pleines et vides peuvent offrir des dispositions relatives variées. Si, pour fixer les idées, on considère un système du premier ordre, S, impliquant les deux fonctions inconnues u, v des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$, le damier dont il s'agit contiendra trois cases pleines, correspondant à ces trois dérivées, et cinq cases vides, correspondant aux dérivées restantes $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial s}$; ces dernières figureront, avec x, y, z, s, u, v, dans les seconds membres du système.

Cela posé, nous dirons qu'une figure à 4 dimensions, définie, dans l'espace à $4+2$ dimensions $[[x, y, z, s, u, v]]$, par un groupe réduit de deux équations finies, est une *figure intégrale* du système S, si ce groupe réduit est résoluble par rapport aux deux coordonnées u, v, et que, après résolution, il fournisse un groupe d'intégrales particulières de S. La figure intégrale sera dite *ordinaire*, si l'on peut assigner à (x, y, z, s) quelque champ de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient analytiques et régulières, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées premières et des variables x, y, z, s, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les seconds

membres du système S soient eux-mêmes des fonctions analytiques et régulières. Une figure intégrale non ordinaire sera dite *singulière*.

V. Le système S étant supposé *complètement intégrable*, ajoutons au nombre des cases vides de son damier celui des fonctions inconnues que le système implique, ce qui donne le total 7; puis, en même temps que le système S, considérons les deux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} F(u, v, x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \\ H(u, v, x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \end{cases}$$

où figurent, avec x, y, z, s, u, v, les sept constantes arbitraires α, β, γ, δ, θ, λ, μ. Les relations (2) étant supposées résolubles par rapport à u, v, exécutons sur elles les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, en traitant u, v comme des fonctions de x, y, z, s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ; il vient ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

Cela étant, les relations (2) seront dites définir une famille *complète* de figures intégrales ordinaires du système S, si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites : 1° *En même temps que les relations* (2) *sont résolubles par rapport aux inconnues* u, v, *le système formé par les dix équations* (2) *et* (3) *est résoluble par rapport aux dix quantités* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, α, β, γ, δ, θ, λ, μ; 2° *par l'attribution à* α, β, γ, δ, θ, λ, μ *de toutes valeurs numériques, les relations* (2) *donnent des figures intégrales ordinaires de* S.

VI. Désignons par j un entier auquel on attribuera tour à tour les diverses valeurs telles : 1° que j soit supérieur à zéro; 2° qu'il soit au plus égal au nombre des constantes arbitraires, c'est-à-dire à 7; 3° qu'il soit au moins égal à ce même nombre, diminué du nombre des variables indépendantes, c'est-à-dire à 3. Cela posé, et *les relations* (2) *étant supposées définir une famille complète de figures intégrales ordinaires du système* S, *il suffit, pour avoir sans aucune figure étrangère toutes les figures intégrales ordinaires de ce système, d'effectuer de toutes les manières possibles l'opération consistant :*

1° à remplacer, dans les relations (2), j des 7 paramètres α, β, γ, δ, θ, λ, μ par autant de fonctions arbitraires des $7-j$ paramètres restants; 2° à prendre, chaque fois qu'elle existe, l'enveloppe des figures de la sous-famille ainsi obtenue.

L'entier j recevant tour à tour les cinq valeurs 7, 6, 5, 4, 3, on peut partager en cinq groupes correspondants les figures intégrales ordinaires de S; *ces groupes n'ont deux à deux aucune figure commune.*

M. L. **Bertin** fait hommage à l'Académie d'une brochure intitulée : *Le Vieux Japon.*

NOMINATIONS.

La **Faculté de Médecine de Montpellier** invite l'Académie à se faire représenter à la célébration du septième centenaire de sa fondation qui aura lieu le 5 novembre prochain.

MM. **L. Guignard**, **Henneguy**, **Viala**, **Widal**, **Bazy** sont désignés pour représenter l'Académie.

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre des Affaires étrangères** transmet une liste de 64 *espèces de moustiques* découvertes jusqu'à ce jour *au Costa-Rica.*

(Renvoi à l'examen de M. E. Bouvier.)

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

L. Stockhammer. *La stéréoscopie rationnelle.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales.* Note de M. **J. Kampé de Fériet**, présentée par M. Appell.

I. Dans des Notes récentes, M. R. Birkeland [1] a donné le développement des racines d'une équation algébrique, en introduisant comme élément analytique des fonctions de n variables qu'il nomme, en élargissant le sens habituel de ce mot : *fonctions hypergéométriques*. En nous bornant au cas de $n = 2$, soit

$$F(x, y) = \Sigma a_{m,n} x^m y^n$$

une telle fonction; elle est caractérisée par la condition que *les rapports* $\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}$ *et* $\frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}}$ *soient des fonctions rationnelles de m et de n :*

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)}, \tag{1}$$

P, Q, R, S désignant des polynomes en m et n, soumis seulement aux restrictions suivantes : 1° les degrés de P et Q sont au plus égaux respectivement à ceux de R et S; 2° R et S ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n; 3° la condition de compatibilité

$$\frac{P(m, n+1)}{R(m, n+1)} \frac{Q(m, n)}{S(m, n)} - \frac{P(m, n)}{R(m, n)} \frac{Q(m+1, n)}{S(m+1, n)} = 0$$

est vérifiée quels que soient m et n.

Ces fonctions n'ont, je crois, été l'objet d'une étude approfondie que dans le cas où, le degré de P, Q, R, S étant au plus égal à deux, $F(x, y)$ se ramène à l'une des quatre fonctions hypergéométriques de M. Appell ou à leurs dégénérescences. Au point de vue général, M. Hj. Mellin [2] a donné (sous forme symbolique) un système de deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $F(x, y)$ dans un cas étendu : celui où les polynomes sont décomposés en facteurs linéaires, $am + bn + c$. *Je me propose de montrer que,* P, Q, R, S *étant donnés, on peut (sans faire d'hypothèse sur la possibi-*

---

(1) R. Birkeland, *Comptes rendus*, t. **171**, 1920, p. 1370; t. **172**, 1921, p. 309 et 1155.

(2) Hj. Mellin, *Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 658.

lité de leur décomposition en facteurs linéaires), former très simplement un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par $F(x, y)$, *lorsqu'on a, au préalable, écrit ces polynomes sous une forme appropriée.*

II. Un polynome arbitraire $\Pi(m, n)$ peut toujours se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \Pi(m, n) = \Sigma \lambda_{j,k} A_m^j A_n^k,$$
$$A_m^j = m(m-1)\ldots(m-j+1), \qquad A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1);$$

les coefficients $\lambda_{j,k}$ se déterminent par les formules

$$(1, j)(1, k)\lambda_{j,k} = \sum_{r=0,\ s=0}^{r=j,\ s=k} \frac{(-j, r)(-k, s)}{(1, r)(1, s)} \Pi(j-r, k-s);$$

en outre, il est clair qu'on a l'identité

$$(3) \qquad x^m y^n \Pi(m, n) = \Sigma \lambda_{j,k} x^j y^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(x^m y^n).$$

Ceci posé, mettons les polynomes donnés sous la forme (2) de la manière suivante :

$$P(m, n) \quad = \Sigma \alpha_{j,k} A_m^j A_n^k, \qquad Q(m, n) \quad = \Sigma \beta_{j,k} A_m^j A_n^k,$$
$$R(m-1, n) = \Sigma \rho_{j,k} A_m^j A_n^k, \qquad S(m, n-1) = \Sigma \sigma_{j,k} A_m^j A_n^k.$$

Il est alors aisé de démontrer que $F(x, y)$ vérifie les deux équations

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\Sigma(\rho_{j,k} - \alpha_{j,k} x) x^j y^k \frac{\partial^{j+k} F}{\partial x^j \partial y^k}\right] = 0,$$

$$(4') \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\Sigma(\sigma_{j,k} - \beta_{j,k} y) x^j y^k \frac{\partial^{j+k} F}{\partial x^j \partial y^k}\right] = 0.$$

En effet, d'aprés l'identité (3), les coefficients de $x^m y^n$ dans les crochets de (4) et de (4′) ont pour expressions

$$a_{m,n} R(m-1, n) - a_{m-1,n} P(m-1, n)$$

et

$$a_{m,n} S(m, n-1) - a_{m,n-1} Q(m, n-1),$$

quantités identiquement nulles en vertu des conditions (1) (la première pour $m \geqq 1$, la deuxième pour $n \geqq 1$).

L'ordre des équations (4) et (4′) est respectivement égal au degré des polynomes R et S augmenté d'une unité. Lorsque R et S contiennent en facteur respectivement $(m+1)$ et $(n+1)$, ce qui entraîne

$$\rho_{0,k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \sigma_{j,0} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

le système s'écrit simplement

$$(5) \qquad \Sigma(\rho_{j,k} - \alpha_{j,k}x)x^j y^k \frac{\partial^{j+k}F}{\partial x^j \partial y^k} = 0,$$

$$(5') \qquad \Sigma(\sigma_{j,k} - \beta_{j,k}y)x^j y^k \frac{\partial^{j+k}F}{\partial x^j \partial y^k} = 0,$$

en outre l'équation (5) est divisible par x et (5′) par y.

III. Les fonctions hypergéométriques de M. Appell et leurs dégénérescences appartiennent à ce dernier type; pour $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$, par exemple :

$$P(m, n) = (\alpha + m + n)(\beta + m), \qquad R(m, n) = (\gamma + m)(1 + m),$$

d'où

$$\alpha_{0,0} = \alpha\beta, \quad \alpha_{1,0} = \alpha + \beta + 1, \quad \alpha_{0,1} = \beta, \quad \alpha_{2,0} = 1, \quad \alpha_{1,1} = 1, \quad \alpha_{0,2} = 0,$$
$$\rho_{0,0} = 0, \quad \rho_{1,0} = \gamma, \quad \rho_{0,1} = 0; \quad \rho_{2,0} = 1, \quad \rho_{1,1} = 0, \quad \rho_{0,2} = 0;$$

ces valeurs, portées dans (5), redonnent bien la première équation de M. Appell.

Voici un exemple où P et R sont de degré p, Q et S de degré q :

$$x, y, p, q) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1} v^{q-1} e^{-u-v}}{1 - x e^{-u} - y e^{-v}} \, du \, dv$$
$$= \sum \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)} \frac{x^m}{(m+1)^p} \frac{y^n}{(n+1)^q} \qquad (p, q \text{ entiers positifs}).$$

Cette fonction hypergéométrique vérifie le système

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)\left(\sum_{j=0}^{j=p} D_p^j x^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial x^j}\right) - xy\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{j=0}^{j=p-1} D_{p-1}^j x^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial x^j}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y)\left(\sum_{j=0}^{j=q} D_q^j y^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial y^j}\right) - xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{j=q-1} D_{q-1}^j y^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial y^j}\right)\right] = 0,$$

où les D_p^j sont des nombres entiers

$$D_p^j = (j+1)^p - \frac{j}{1}(j)^p + \frac{j(j-1)}{1.2}(j-1)^p - \ldots$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues.* Note de M. **Maurice Janet**, présentée par M. Hadamard.

1. On possède des méthodes générales qui permettent, étant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles (analytique) : 1° de reconnaître s'il est possible; 2° dans l'affirmative, d'indiquer le degré de généralité de sa solution. Mais, en raison même de leur puissance, ces méthodes semblent souvent insuffisantes dans la pratique : on sait qu'elles *doivent* aboutir « au bout d'un nombre fini d'opérations »; encore peuvent-elles exiger un temps fort long et peut-on demander de les *voir* aboutir pour un système de forme simple donnée. C'est à une question de ce genre que nous nous proposerons de répondre pour certains systèmes assez généraux dont l'étude semble s'imposer d'elle-même.

Soient A_{ik} des expressions différentielles linéaires (1) $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$ en nombre N^2. Nous dirons que les expressions

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik}(u_k)$$

sont *indépendantes* s'il n'existe aucun système B_i d'expressions différentielles linéaires (non toutes identiquement nulles) telles que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=N} B_i(U_i) = 0$$

pour tout choix possible des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Supposons que l'on égale les N expressions U_i respectivement à des fonctions données f_i des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on obtient ainsi un système de N équations linéaires (E_i) aux N inconnues u_i; dans le cas où les expressions U_i sont *indépendantes*, nous dirons que les équations E_i le sont. Un tel système est évidemment possible quelles que soient les f. Que peut-on dire du *degré de généralité* de sa solution?

(1) Une expression différentielle linéaire $A(u)$ est une somme d'un nombre fini d'expressions de la forme $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, où les a sont des fonctions données des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Une telle expression est dite identiquement nulle si tous les a qui y figurent sont identiquement nuls.

2. On peut se borner aux systèmes du premier ordre sans restreindre la portée du problème posé. La réponse est alors presque immédiate lorsque $N = 2$.

Si le système n'est pas susceptible d'être mis sous la forme *normale* de Cauchy (même en utilisant un changement de variables), on s'assure aisément qu'après un changement linéaire éventuel de fonctions inconnues, l'une des fonctions u satisfait à *une seule* équation (d'ordre 1 ou 0), l'autre, v, étant parfaitement déterminée en fonction de u et des dérivées premières de u. En excluant le cas où les *deux* fonctions se trouvent entièrement déterminées, la solution générale dépend [1] donc soit de deux, soit de une fonction arbitraire de $n-1$ variables.

3. Nous considérerons ici un système *quelconque de trois équations linéaires du premier ordre aux trois fonctions inconnues* u, v, w, en supposant seulement que ces équations sont *indépendantes*. Dans le cas où les équations sont résolubles (après changement éventuel de variables indépendantes) par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_1}$, on sait que la solution dépend de *trois* fonctions arbitraires de $n-1$ variables. Excluons ce cas, qui est classique. Excluons aussi les cas dont l'étude est immédiate, où, par de simples combinaisons linéaires des équations données et par un changement linéaire (éventuel) des fonctions inconnues, on peut ramener le système donné à l'une des formes (a), (b), (c) :

a. Un système de deux équations indépendantes du premier ordre en u, v, et une équation déterminant complètement w en fonction de u, v (et de leurs dérivées premières);

b. Une équation d'ordre 1 (ou 0) en u seul; une équation déterminant complètement v en fonction de u (et de ses dérivées premières); une équation d'ordre au plus 1 en u, v, w, contenant effectivement des termes en w (d'ordre au plus 1);

c. Deux équations déterminant respectivement u, v en fonction de w (et de ses dérivées premières); une équation du premier ordre en u, v, w. La fonction w satisfait alors évidemment à une *seule* équation dont l'ordre est 2, 1 ou 0.

---

[1] Les théorèmes généraux d'existence permettent de donner à cette expression un sens précis : d'une manière générale, en appelant *genre* d'une arbitraire le nombre de ses variables, on sait que le *genre maximum* λ des arbitraires, et le *nombre* μ des arbitraires de *genre maximum* conservent la même valeur quelles que soient la forme canonique et les variables indépendantes choisies; le degré de généralité est caractérisé, à notre point de vue actuel, par les deux nombres λ, μ.

On voit immédiatement que la solution d'un système de l'une des formes a, b, c peut dépendre de deux ou de une fonction arbitraire de $n-1$ variables, ou encore être entièrement déterminée.

Les cas précédents étant exclus ([1]), nous *démontrons qu'on peut toujours, par simples combinaisons linéaires d'équations et changement linéaire de fonctions inconnues, ramener le système proposé* à la forme

$$(1)\quad \begin{cases} E(u, v, w) \equiv R(v) - Q(w) + a u + b v + c w = f, \\ F(u, v, w) \equiv P(w) - R(u) + a' u + b' v + c' w = f', \\ G(u, v, w) \equiv Q(u) - P(v) + a'' u + b'' v + c'' w = f'', \end{cases}$$

où P, Q, R sont trois expressions différentielles linéaires ne renfermant que des termes du premier ordre et dont aucune n'est combinaison linéaire des deux autres (a, b, ..., f'' fonctions connues).

La solution générale d'un tel système dépend soit de deux, soit de une fonction arbitraire de $n-1$ variables; ou, plus correctement, le *genre maximum* λ des arbitraires dont dépend la solution est, *dans tous les cas*, $n-1$, et le nombre μ de ces arbitraires de genre $n-1$ est, *suivant les cas*, 2 ou 1.

4. L'étude précédente pose d'elle-même la question suivante : « Étant donné un système linéaire comprenant *autant* d'équations que de fonctions inconnues; si ces équations sont supposées *indépendantes*, peut-on affirmer que la solution, ou bien est *entièrement déterminée*, ou bien dépend de *fonctions arbitraires de $n-1$ variables?* »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de fonctions transcendantes.* Note de M. **Théodore Varopoulos**, présentée par M. Hadamard.

1. Soit $u = \varphi(x)$ une fonction de x ayant un nombre ν fini de branches satisfaisant à l'équation

$$f(u, x) = u^{\nu} + A_1(x) u^{\nu-1} + A_2(x) u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu}(x) = 0,$$

où $A_i(x)$ désignent des fonctions entières. En vertu du théorème sui-

---

([1]) On rencontre dans la théorie de la déformation des surfaces le système

$$S x_u X_u = a, \qquad S x_u X_v + x_v X_u = b, \qquad S x_v X_v = c,$$

où x, y, z sont des fonctions inconnues et X, Y, Z, a, b, c des fonctions données des deux variables u, v; en prenant trois nouvelles fonctions inconnues, parmi lesquelles $S x X_u$ et $S x X_v$, on voit que ce système est du type (a).

vant ([1]) : *Une transcendante algébroïde quelconque à ν branches prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs sauf, peut-être, 2ν au plus, l'infini compris*, théorème qui est l'extension aux fonctions multiformes du célèbre théorème de M. Picard, le nombre des *valeurs exceptionnelles* de la fonction $\varphi(x)$ ne surpasse jamais 2ν.

2. Dans cette Note nous allons établir un théorème qui concerne le nombre des valeurs exceptionnelles d'une classe, assez générale d'ailleurs, de fonctions du type précédent. C'est le théorème suivant :

Théorème. — *Considérons la transcendante $u = \varphi(x)$ définie par l'équation suivante*

$$f(u, x) = u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(x)u + A_\nu(x) = 0,$$

$A_i(x)$ étant des fonctions entières.

Si les fonctions $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ont, au moins, une racine commune $x = a$ et si $(\nu - 1)$ fonctions quelconques parmi ces $A_i(x)$ ont aussi une racine commune $x = \beta \neq a$, l'ensemble des valeurs exceptionnelles de $u = \varphi(x)$ ne surpasse jamais $\nu + 1$, l'infini compris.

La démonstration du théorème que nous venons d'énoncer se fait par la méthode d'élimination qui est devenue classique depuis les travaux de M. Rémoundos sur les fonctions multiformes, et s'appuie sur le fait qu'on ne peut pas avoir de valeurs de u, u_i et u_j pour lesquelles le rapport $\frac{f(u_i, x)}{f(u_j, x)}$ est une constante.

L'importance de ce théorème réside dans le fait qu'ici le nombre 2ν est remplacé par $\nu + 1$.

Enfin, nous signalons que nous pouvons en tirer des conséquences tout à fait analogues à celles que nous avons déjà établies dans une Note précédente ([2]).

GÉOMÉTRIE. — *Sur les lignes de courbure des quadriques.* Note de M. d'Ocagne, présentée par M. Hadamard.

Je ne sais si l'on a déjà formulé explicitement la remarque que *les huit génératrices isotropes d'une quadrique constituent une solution singulière de*

([1]) Thèse de M. Rémoundos, Paris, 1915, p. 13.

([2]) *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 144.

l'équation différentielle des lignes de courbure de cette quadrique, et, par suite, qu'*elles forment l'enveloppe de ces lignes de courbure.*

On peut, en tout cas, établir très simplement cette remarque par le raisonnement purement synthétique que voici :

En tout point M d'une telle génératrice isotrope MI, le plan tangent à la quadrique contient : 1° une seconde droite isotrope MJ ; 2° la seconde génératrice rectiligne MG de la surface.

Les directions principales en M sont conjuguées par rapport aux génératrices MI et MG ; mais, puisqu'elles sont rectangulaires, elles le sont aussi par rapport aux droites isotropes MI et MJ ; et, comme ces deux couples de droites ont en commun la droite MI, il n'en peut être ainsi qu'autant que les deux directions principales se confondent avec cette droite MI, ce qui établit la proposition.

La projection, sur un plan principal, des huit génératrices isotropes se composant des tangentes menées à la section principale correspondante par les quatre ombilics qu'elle contient, il résulte de là que *les projections des lignes de courbure d'une quadrique sur un de ses plans principaux se confondent avec les coniques inscrites dans le losange formé par les tangentes à la section contenue dans ce plan, menées par les ombilics qui appartiennent à cette section.*

Toutes les quadriques pour lesquelles ces tangentes sont les mêmes constituent donc *une famille pour laquelle les projections des lignes de courbure sur un plan principal commun sont les mêmes.*

Soit, par exemple, dans le plan principal Oxz (où se trouvent pour l'ellipsoïde de demi-axes $a > b > c$, les ombilics réels), le losange UWU'W' dont les sommets U et U' sont sur Ox, les sommets W et W' sur Oz.

Toutes les coniques inscrites dans ce losange sont, à la fois, les projections des lignes de courbure de toutes les quadriques ayant l'une quelconque d'entre elles pour section principale, et leurs ombilics réels aux points de contact de cette section principale, avec les côtés du losange. Il suit de là que le demi-diamètre déterminé par chacune de ces coniques sur les parallèles aux côtés du losange menées par O est égal au demi-axe b de la quadrique correspondante, situé sur Oy.

CHRONOMÉTRIE. — *Le problème de l'acheminement et les mouvements pendulaires entretenus.* Note (¹) de M. **Jules Andrade.**

Quelques écrivains horlogers, sous le nom d'*acheminement*, désignent la marche plus ou moins régulière d'une machine horaire dont le balancier vient d'être lancé, jusqu'à la réalisation d'*un régime périodique limite*, caractérisé pour un instrument donné par son *amplitude de régime*. Bien que cette *convergence* vers un régime limite périodique paraisse un fait certain, sa réalisation demeure liée cependant non seulement à l'action régulière de l'échappement, mais encore à la spécialisation de *certaines hypothèses faites tacitement* sur les lois du choc. Pour développer cette remarque j'envisage le cas d'un mouvement pendulaire entretenu par l'impulsion réparatrice de l'usure d'énergie qui est due à un frottement constant.

Dans ces conditions, je me propose de discuter la convergence de l'établissement d'un régime limite lorsque *le choc réparateur, instantané*, se traduit par un accroissement instantané d'une puissance constante p de la vitesse; en d'autres termes, je suppose que la grandeur mécanique constante se transmettant dans le choc réparateur soit de l'ordre d'homogénéité d'une puissance positive p d'une vitesse et je ne considère que les cas où la puissance p est positive et supérieure à 1. Pour plus de simplicité, j'envisage *un échappement à coup perdu*, c'est-à-dire *ne fonctionnant que toutes les deux vibrations simples*, l'échappement fonctionnera par exemple aux oscillations de rangs 1, 3, 5, ...; si f est le décalage du point mort dû au frottement constant et si φ est, par rapport au point mort décalé, la phase de la distribution du choc de l'échappement, les semi-amplitudes initiales successives u_0, u_2, ..., u_{2n} ou plutôt leurs valeurs absolues se succéderont suivant la loi

$$(1)\qquad [(u_{2n}+3f)^2-\varphi^2]^{\frac{p}{2}}-[(u_{2-2}-f)^2-\varphi^2]^{\frac{p}{2}}=\mathcal{K}=\text{constante positive};$$

cette loi de récurrence définit implicitement une fonction $u_{2n}=G(u_{2n-2})$.

D'après un élégant théorème de M. Kœnigs *sur les substitutions répétées* et en envisageant la valeur de régime α définie par la relation

$$(2)\qquad [(\alpha+3f)^2-\varphi^2]^{\frac{p}{2}}-[(\alpha-f)^2-\varphi^2]^{\frac{p}{2}}=\mathcal{K},$$

nous pourrons utiliser comme condition de *convergence assurée* la condi-

---

(¹) Séance du 20 juin 1921.

tion $|G'(\alpha)| < 1$, et comme condition de *divergence assurée* la condition $|G'(\alpha)| > 1$.

Or nous aurons ici

$$(3) \qquad G'(\alpha) = \left(\frac{\alpha - f}{\alpha + 3f}\right)^{p-1} \left(\frac{1 - \frac{\varphi^2}{(\alpha - f)^2}}{1 - \frac{\varphi^2}{(\alpha + 3f)^2}}\right)^{\beta} \qquad \text{où} \qquad \beta = \frac{p-2}{2};$$

d'où, pour $\frac{f}{\alpha}$ petit, les conclusions suivantes :

1° Convergence certaine pour $p \geqq 2$;

2° Pour $\frac{\varphi^2}{\alpha^2}$ et $\frac{f}{\alpha}$ de même ordre de petitesse, convergence certaine si

$$p - 1 > \frac{\frac{\varphi^2}{\alpha^2}}{1 + \frac{\varphi^2}{\alpha^2}};$$

3° Pour $\frac{\varphi^2}{\alpha^2} < 1$, mais modérément petit, et $\frac{f}{\alpha}$ toujours petit, convergence certaine si

$$\frac{\varphi^2}{(\alpha - f)^2} < \frac{p-1}{2};$$

4° La condition $\varphi = 0$ assure un isochronisme rigoureux quand $p > 1$;

5° Ainsi donc un échappement instantané agissant non pas au véritable point mort, *mais au point mort décalé*, assure à la fois un rigoureux isochronisme et un acheminement convergent toutes les fois que *p est supérieur à* 1;

6° Le cas de $p = 1$ et de $\varphi = f$ donne toujours divergence ;

7° Le cas de $p = 1$ et de $\varphi = 0$ produirait l'arrêt du mouvement, sauf dans un cas singulier instable.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Équilibre et stabilité des appareils élastiques.* Note de M. A. Thuloup, présentée par M. Bertin.

Dans sa Note *Sur le flambement des poutres et des anneaux élastiques*, publiée en 1912 (*Bulletin de l'Association technique maritime*), l'ingénieur en chef du Génie maritime Marbec a exposé succinctement les fondements de la théorie du flambement des appareils élastiques. Dans une étude récente dont voici un bref résumé, nous avons approfondi et complété les indications de Marbec.

A. Considérons un appareil élastique, de potentiel élastique Π soumis

à un système de forces (λF) : λ est un nombre variable, (F) un système de forces dérivant d'un potentiel ϖ, fonction comme Π des variables de forme α, β, ... de l'appareil. Nous pouvons donner à la fonction

$$\Theta = \Pi(\alpha, \beta, \ldots) + \lambda\varpi(\alpha, \beta, \ldots)$$

le nom de *potentiel total* de l'appareil dans l'état $(\lambda, \alpha, \beta, \ldots)$.

Bornons-nous à considérer un appareil à état initial élastiquement neutre et à déformations réversibles.

En vertu du principe de Lagrange-Dirichlet, un état $(\lambda_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)$ est un état d'équilibre stable si Θ_1 est un minimum de Θ.

B. Pour mettre facilement en évidence les points essentiels du problème, il est commode de s'adresser à des appareils dépendant d'un petit nombre de variables de forme. Nous avons étudié à ce point de vue les *doublets élastiques :* un tel appareil est constitué par un solide (supportant les forces λF), uni au repère fixe par des liaisons élastiques, lesquelles ne supportent aucune charge.

Soit par exemple un doublet bivariant, c'est-à-dire dépendant de deux variables de forme α, β. A chaque valeur λ_1 de λ correspond une position d'équilibre (α_1, β_1). Par rapport à trois axes $O\lambda$, $O\alpha$, $O\beta$, le point $(\lambda_1, \alpha_1, \beta_1)$ décrit, quand λ_1 varie de $-\infty$ à $+\infty$, *une courbe d'équilibre.*

Celle-ci comporte en général une *branche-origine* passant par le point O (état initial) et des *branches forcées*, sur lesquelles l'appareil ne peut se placer sans avoir subi transitoirement des forces autres que (λF).

Sur ces diverses branches se trouvent des *points critiques* (à distance finie ou infinie), qui séparent les portions stables des portions instables. Quand l'appareil traverse un point critique, il change de branche d'équilibre, soit par *bifurcation* sur une branche croisant la première, soit par *chavirement* sur une branche éloignée.

Le flambement est la règle sur les branches forcées; sur la branche-origine, il exige des modes de chargement spéciaux. Si l'on appelle *appareils réduits* ceux qu'on obtient en supprimant, dans l'appareil donné, les liaisons élastiques correspondant à une ou plusieurs des variables de forme, *ces chargements spéciaux sont ceux qui laissent sans déformation un des appareils réduits* (criterium de Marbec généralisé).

C. Pour un doublet univariant, la considération de deux développées

métacentriques, l'une externe, l'autre interne, permet d'exposer la question géométriquement et de mettre en évidence une intéressante analogie avec les questions d'équilibre et de stabilité des navires.

Il est très facile de réaliser un dispositif expérimental matérialisant tous les cas possibles de flambement et d'enregistrer les résultats.

D. Le flambement des poutres droites sous l'action des forces debout peut être étudié par les mêmes procédés. Nous en avons traité un cas usuel en tenant compte de l'extensibilité : l'action de celle-ci est négligeable, comme on le suppose habituellement sans démonstration.

Nous avons aussi étudié les conditions de flambement d'un ressort cylindrique, appareil pour lequel la simplification précitée n'est pas toujours admissible.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Photographies de la planète Vénus.* Note [1] de M. F. QUÉNISSET, présentée par M. H. Deslandres.

Les astronomes qui ont observé la planète Vénus savent qu'on y voit très rarement des taches et que sa surface paraît le plus souvent uniformément éclairée, sauf au terminateur où existe toujours un assombrissement marqué, indice d'une atmosphère épaisse. Quelquefois, cependant, on peut observer des régions plus ou moins foncées, ainsi que des taches assez claires. Quand nous les avons vues au télescope, nous avons cherché aussi à les photographier et nous y sommes parvenu pour la première fois le 29 juin 1911 [2].

Cette année, le fait s'est encore produit, mais d'une façon plus marquée qu'en 1911 et la position de la planète, très favorable pour notre latitude, facilitait beaucoup les observations.

Comme en 1911, je me suis servi d'un excellent objectif astrophotographique taillé par M. Viennet, de l'Observatoire de Paris, d'un diamètre de $0^{m},160$ et d'une distance focale de $2^{m},90$. Un système de lentilles permet l'agrandissement direct de l'image focale Sur chaque plaque, nous avons eu soin de faire plusieurs images à quelques secondes d'intervalle, de façon à identifier plus sûrement les détails enregistrés et aussi pour faire la part des défauts accidentels de l'émulsion employée.

Pendant les mois de février et mars de cette année, chaque fois que l'état des images le permettait, nous avons fait un grand nombre de photogra-

(1) Séance du 20 juin 1921.

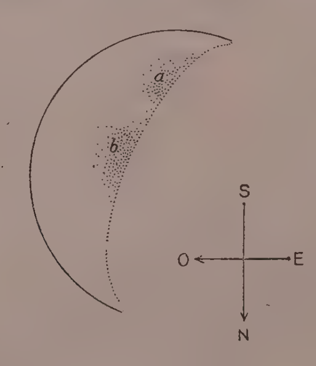
(2) *Comptes rendus*, t. 153, 1911, p. 1208.

phies de Vénus. Souvent on ne voyait rien au télescope et la photographie n'enregistrait aucun détail non plus. Quelquefois, des plages grises ou blanchâtres étaient visibles dans la lunette d'observation et la plaque sensible les enregistrait aussi. Nous avons l'honneur de présenter à l'Académie une des meilleures photographies obtenues, celle du 23 février 1921 à 18^h25^m (t. m. Greenwich). Ce jour-là, une observation faite à l'équatorial de $0^m,240$ nous avait révélé l'existence indéniable d'une tache grisâtre très marquée sur le terminateur de la planète, près du centre. Aussi nous prîmes immédiatement plusieurs clichés sur des plaques de sensibilités différentes. Les images n'étaient pas calmes, une légère agitation atmosphérique leur enlevait même une certaine netteté, mais cette tache était si frappante que nous étions pour ainsi dire certain de l'obtenir sur les clichés. Et, en effet, toutes les plaques exposées la montrent avec la plus grande évidence. M. E.-M. Antoniadi, qui est un spécialiste apprécié pour l'observation des planètes, a bien voulu exécuter un dessin, extrêmement fidèle, d'après ces photographies et montrant tous les détails enregistrés. Nous le donnons ici.

Les meilleures photographies ont été obtenues sur une plaque « *Lantern* » *Eastman*, plaque lente donnant donc du contraste. Dix-sept images ont été fixées entre 18^h20^m et 18^h30^m, avec des poses variant de 2 à 10 secondes. Le diamètre *polaire* de Vénus sur ces images mesure $3^{mm},3$. Deux de ces images, exposées seulement 2 secondes, sont trop faibles, mais les quinze autres sont excellentes et montrent, toutes, les détails suivants :

1° *Terminateur très sombre* et dégradé vers l'Ouest;

2° *Limbe occidental*, tourné vers le Soleil, *très brillant;*



3° *Tache sombre* très marquée (indiquée en *b* sur le dessin) vers le centre du terminateur et s'avançant assez loin dans la partie intérieure du croissant;

4° *Tache sombre* (*a* sur le dessin) un peu moins marquée que la précédente, mais bien visible cependant, dans la partie australe du terminateur; un peu moins étendue que la tache *b*;

5° Entre ces deux taches existe une *plage* paraissant très *blanche*, probablement par effet de contraste.

Les taches 3° et 4° (marquées *b* et *a* sur le dessin) sont donc absolument certaines et leurs photographies apportent une contribution importante à notre connaissance de l'aspect physique de la planète Vénus. Elles viennent confirmer nos observations visuelles. Quelle est leur nature? Nous montrent-elles un peu de la surface de la planète et, dans ce cas, elles seraient des éclaircies dans le voile nuageux qui recouvre la planète, ou bien sont-elles des masses plus absorbantes dans l'atmosphère vénusienne?

Le lendemain 24 février, à la même heure, nous avons repris un assez grand nombre de photographies de Vénus (21 images). Sur toutes ces images on ne voit plus les taches *a* et *b*, mais d'autres taches, bien plus faibles et plus vagues, et sensiblement à d'autres positions. Il faut donc admettre que les détails photographiés le 23 février étaient, ou bien d'origine atmosphérique sur Vénus et que, dans un intervalle de 24 heures terrestres, elles se sont modifiées considérablement, ou bien que ces mêmes taches pouvaient appartenir à la surface de la planète et que celle-ci a un mouvement de rotation très différent de celui de la Terre.

Ces premiers résultats photographiques sont encourageants et nous montrent que l'on pourrait peut-être arriver à élucider la question de la rotation de la planète, en entreprenant sa photographie systématique, dans un observatoire placé dans de bonnes conditions au double point de vue atmosphérique et instrumental.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl.* Note de M. **Juvet**, présentée par M. Hadamard.

M. Blaschke a donné récemment ([1]) les formules de Frenet pour une courbe tracée dans un espace (R_n) à métrique riemannienne, où l'on définit le déplacement parallèle comme le fait M. Levi-Civitá ([2]). En employant les mêmes procédés de calculs que M. Blaschke, nous avons obtenu les

---

([1]) *Math. Zeitschrift*, 1919, Bd 6.

([2]) *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. **42**, 1917.

formules de Frenet pour une courbe tracée dans un espace (W_n) *à métrique de Weyl.*

Un espace de Weyl [1] à n dimensions (W_n) est une multiplicité à n dimensions où la métrique est définie par les deux formes (quadratique et linéaire) :

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} g_{ik}\,dx_i\,dx_k, \qquad d\varphi = \sum_{i}^{1,\dots,n} \varphi_i\,dx_i;$$

$d\varphi$ est un invariant pour toute transformation continue (T) de la forme

$$x_i = \psi_i(y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

De plus, si l'on change d'étalonnage, c'est-à-dire si en chaque point $(x, \dots, x_n)$ on prend une unité de longueur $\sqrt{\lambda}$ fois plus petite (λ = fonction continue de $x, \dots, x_n$), les deux formes deviennent :

$$ds'^2 = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} \lambda g_{ik}\,dx_i\,dx_k, \qquad d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Les lois de la Géométrie doivent satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Elles s'expriment par des formules qui sont invariantes pour toute transformation (T);

2° Ces formules restent invariantes si l'on change g_{ik} en λg_{ik}, et φ_i en $\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$.

M. Weyl a défini le déplacement parallèle dans cette nouvelle conception. Soit un vecteur aux composantes $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ attaché au point $P(x, \dots, x_n)$, nous dirons que sa *mesure* est

$$m = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} g_{ik}\xi^i\xi^k;$$

en le déplaçant par congruence de P en $P'(x_i + dx_i)$, ses composantes deviennent $\xi^i + d\xi^i$, avec

$$d\xi^i = -\frac{1}{2}\sum_{k,r,t}^{1,\dots,n} g^{ik}\left[\frac{\partial g_{tk}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_t} - \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_k} + g_{rk}\varphi_t + g_{tk}\varphi_r - g_{rt}\varphi_k\right]\xi^r\,dx_t.$$

Soit une courbe C, dont les équations paramétriques sont $x_i = k_i(s)$; en chaque point $P(s)$, imaginons que nous ayons fixé suivant une loi continue

(1) Voir WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 4e édition, § 16.

un vecteur Ξ, dont les composantes (ξ^i) sont des fonctions continues de s; soient $P(s)$ et $P'(s+ds)$ deux points voisins, il leur correspond donc les deux vecteurs Ξ et Ξ'; déplaçons Ξ par congruence de P à P', on obtient en P' un vecteur Ξ^* différent en général de Ξ'; la différence $\Xi' - \Xi^*$ est un vecteur infiniment petit attaché à l'arc PP'; formons

$$\theta(\Xi) = \frac{\Xi' - \Xi^*}{ds}.$$

Nous obtenons ainsi un nouveau vecteur $\theta(\Xi)$ attaché au point $P(s)$ de la courbe C, et dépendant du champ Ξ d'une manière invariante [1]. Soit alors $\Xi = \Xi_1$ aux composantes $\xi^i_{(1)} = \frac{dx_i}{ds}$. Posons ensuite

$$\begin{array}{ll} \theta(\Xi_1) = \Xi_2 & \text{aux composantes } \xi^i_{(2)}, \\ \theta(\Xi_2) = \Xi_3 & \quad\text{»}\quad \xi^i_{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \theta(\Xi_{n-1}) = \Xi_n & \text{aux composantes } \xi^i_{(n)}. \end{array}$$

Le n-èdre $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$ n'est pas orthogonal en général. Orthogonalisons-le suivant la méthode de M. Schmidt [2] en définissant un n-èdre formé par les n vecteurs

$$H_p = \frac{1}{\sqrt{D_{p-1} D_p}} \begin{vmatrix} (1,1), (1,2), \ldots, (1,p-1), \Xi_1 \\ (2,1), \\ \ldots\ldots, \\ (p,1), \qquad \ldots, (p,p-1), \Xi_p \end{vmatrix} \qquad (p = 1, 2, - n),$$

où l'on a posé

$$(\alpha, \beta) = \sum_{ik}^{1-n} g_{ik}\, \xi^i_{(\alpha)} \xi^k_{(\beta)}; \qquad D_p = \begin{vmatrix} (1,1)\ldots(1,p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,1)\ldots(p,p) \end{vmatrix}; \qquad D_0 = 1.$$

Le n-èdre (N), $H_1, \ldots, H_n$ est orthogonal et normé, c'est-à-dire que

$$\sum_{ik}^{1-n} g_{ik}\, \eta^i_{(p)} \eta^k_{(q)} = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Les formules de Frenet pour la courbe C sont les formules qui donnent les valeurs de s :

$$\theta(H_p) = \frac{H'_p - H^*_p}{ds}.$$

---

(1) WEYL, *loc. cit.*, p. 103.

(2) *Integralgleichungen*, etc. (*Math. Ann.*, Bd 63).

On trouve, par des calculs simples :

$$(\mathrm{F})\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta\eta^i_{(1)} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(1)} + \frac{1}{\rho_1}\eta^i_{(2)}, \\ \theta\eta^i_{(2)} = -\frac{1}{\rho_1}\eta^i_{(1)} + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(2)} + \frac{1}{\rho_2}\eta^i_{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \theta\eta^i_{(p)} = -\frac{1}{\rho_{p-1}}\eta^i_{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(p)} + \frac{1}{\rho_p}\eta^i_{(p+1)} \qquad (p = 2, \dots, n-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \theta\eta^i_{(n)} = -\frac{1}{\rho_{n-1}}\eta^i_{(n-1)} + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(n)}, \end{array} \right.$$

où

$$\rho_k = \frac{D_k}{\sqrt{D_{k-1}\,D_{k+1}}}.$$

Les $\theta\eta^i_{(k)}$ sont donc des fonctions linéaires et homogènes des $\eta^i_{(q)}$; le déterminant des coefficients de ces fonctions est *symétrique gauche;* les ρ_i sont les $(n-1)$ *rayons de courbure* de la courbe. Ce déterminant possède une diagonale principale dont tous les termes *sont égaux à* $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}$; pour un espace (R_n), les formules (F) sont les mêmes que celles que nous venons de trouver, sauf à y faire tous les termes de la diagonale principale égaux à zéro (les ρ_i n'ayant pas la même valeur, ils dépendent des φ_i). Si l'on regarde le trièdre (N) comme mobile sur la courbe C, on peut dire que l'on passe d'une de ses positions à la position voisine *en le déplaçant par congruence*, puis en *lui faisant subir une rotation définie par les courbures* $\frac{1}{\rho_i}$ *de* C, et, enfin, en *le déformant suivant une homothétie de rapport* $1 + \frac{d\varphi}{2}$.

PHYSIQUE. — *Sur la structure électronique des atomes lourds.* Note de MM. **L. de Broglie** et **A. Dauvillier**, présentée par M. Deslandres.

L'objet de cette Note est de confronter les indications physico-chimiques concernant la structure électronique des éléments avec celles qui sont fournies par l'étude de leurs spectres de rayons X.

L'un de nous [1] a proposé la classification périodique des corps simples basée sur leur structure électronique qui est reproduite ci-après :

---

[1] A. Dauvillier, *Revue générale de l'Électricité*, t. 8, décembre 1920, p. 787.

Nombre de couches électroniques.	Nombre d'électrons superficiels. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	1H							(2He)
2.	3Li	4Gl	5B	6C	7N	8O	9F	10Ne
3.	11Na	12Mg	13Al	14Si	15P	16S	17Cl	18A
4.	19K	20Ca	21Sc	22Ti	23V	Cr.Mn.Fe.Co.Ni		
5.	29Cu	30Zn	31Ga	32Ge	33As	34Se	35Br	36Kr
6.	37Rb	38Sr	39Yt	40Zr	41Nb	Mo.43.Ru.Rh.Pd		
7.	47Ag	48Cd	49In	50Sn	51Sb	52Te	53I	54X
8.	55Cs	56Ba	57La	58Cl	Pr.Nd.61.Sm.Eu	Gd.Tb.Dy.Ho.Er		
9.	69Tm	70Yb	71Lu	72Ct	73Ta	W.75.Os.Ir.Pt		
10.	79Au	80Hg	81Tl	82Pb	83Bi	84Po	85	86Em
11.	87	88Ra	79Ac	90Th	91UX$_2$	92U	93	94

Dans les quatre groupes de cinq éléments de propriétés chimiques analogues, l'électron additionnel (correspondant à l'augmentation d'une unité du nombre atomique) s'ajoute non plus à la couche externe, mais à la couche électronique sous-jacente. Par exemple, le chrome possède une couche K constituée par 2 électrons, une seconde couche L comptant 8 corpuscules, une troisième M en renfermant 8 également et enfin 6 corpuscules superficiels de valence. Le nickel ne diffère, à ce point de vue, du chrome que par sa troisième couche qui renferme 12 corpuscules.

Les quatre séries horizontales incomplètes (n°s 4, 6, 8 et 9) qui résultent de ces condensations d'électrons et qui ne se terminent pas par un gaz rare se condensent elles-mêmes de la même façon dans les séries complètes qui les précèdent si bien que le nombre des électrons des diverses couches définitives des éléments inertes peut être représenté comme il suit :

Nombre atomique.	Élément.	Nombre d'électrons dans les couches électroniques complètes. K.	L.	M.	N.	O.	P.	Q.
2.............	He	2	″	″	″	″	″	″
10.............	Ne	2	8	″	″	″	″	″
18.............	A	2	8	8	″	″	″	″
36.............	Kr	2	8	18	8	″	″	″
54.............	X	2	8	18	18	8	″	″
86.............	Em	2	8	18	18	32	8	″
92.............	U	2	8	18	18	32	8	6

Ce schéma diffère de ceux qui ont été publiés jusqu'à ce jour, notamment de ceux de Langmuir et de Sommerfeld.

Or l'un de nous, ayant récemment déterminé le nombre et la valeur des niveaux d'énergie dans l'atome d'uranium par l'étude spectrographique des séries L de cet élément, n'a trouvé pour cet atome que cinq couches

distinctes K, L, M, N, O ([1]). La dispersion était dans ces expériences suffisante pour qu'une raie faible dénotant un niveau P fût visible entre la raie β_5 et la discontinuité d'absorption L_1. Aucune raie de ce genre n'ayant été observée, il s'agit d'expliquer ce désaccord apparent.

L'uranium constituant l'anticathode étant métallique, et par suite cristallisé, apparaît tout d'abord exister sous forme d'ions U^{++++++} qui occupent les nœuds d'un réseau. La couche optique Q est donc déjà dissociée en électrons libres. Pour expliquer la disparition de la couche P, nous proposons l'hypothèse suivante : les ions occupant le foyer anticathodique doivent s'y trouver dans un état très particulier, par suite de la très haute température locale qui y règne.

Lilienfeld ([2]) a récemment analysé au moyen d'un spectrographe en verre le rayonnement lumineux issu d'un tel foyer et a observé un spectre continu prédominant dans le bleu dénotant une température locale extrêmement élevée. Le travail d'extraction des corpuscules P n'atteignant sans doute que quelques dizaines de volts, nous pensons que ces électrons sont expulsés de l'atome par les chocs dus à l'agitation thermique et que la première couche conservant son intégrité est la dernière couche révélée par le spectre X, dont le potentiel d'extraction est voisin de 60 volts.

Un calcul rapide montre que la destruction de l'anneau P peut être expliquée par une température locale de quelques milliers de degrés, compatible avec les observations de Lilienfeld et peu surprenante si l'on songe qu'en cet endroit se convertit en chaleur une puissance de plusieurs hectowatts dans une masse de matière de l'ordre du dixième de milligramme.

Suivant cette hypothèse, on devrait voir apparaître des lignes faibles entre la ligne β_5 et la discontinuité L_1 par exemple en excitant la série L_1 par fluorescence. L'existence du niveau N pour le calcium révélée par l'apparition de la ligne K_γ s'expliquerait en admettant que ce niveau normalement dépourvu de corpuscules n'intervient que comme niveau possible de Bohr, comme cela a lieu pour les spectres optiques de l'hydrogène et des premiers éléments.

Dans sa théorie de l'équilibre des astres, M. Eddington ([3]) a été amené à formuler une hypothèse voisine de celle que nous venons d'énoncer.

([1]) A. Dauvillier, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 915 et 1350. — *Erratum :* Une erreur de copie a fait attribuer à la ligne K_γ l'origine N_4. C'est N_5 qu'il faut lire. De plus, une étude plus complète nous a montré depuis que les niveaux désignés par N_1 et N_2 sont en réalité des niveaux O.

([2]) *Phys. Zeits.*, t. 20, juin 1919, p. 280.

([3]) *Scientia*, t. 23, n° 69, 1918.

D'après cette théorie, il régnerait à l'intérieur des étoiles une température de quelques millions de degrés, température à laquelle l'intensité maxima de la radiation « noire » correspond à des longueurs d'onde de quelques Ångströms. Les coefficients d'absorption calculés par M. Eddington pour ces longueurs d'onde sont très inférieurs à ceux qui leur correspondent à la température ordinaire. Le savant astronome a interprété ce fait en supposant qu'à des températures aussi élevées, les atomes constituant la matière stellaire ont perdu un très grand nombre de leurs électrons internes et sont devenus incapables d'absorber les radiations, du moins dans le domaine spectral des rayons X très mous.

Des calculs approximatifs confirment cette manière de voir et montrent que tous les anneaux périphériques, y compris les anneaux N, ne peuvent résister aux chocs dus à une agitation thermique aussi intense. La corrélation avec notre point de vue est évidente.

PHYSIQUE. — *Sur une trompe à mercure d'encombrement réduit.* Note de M. G. **Ranque**, présentée par M. H. Le Chatelier.

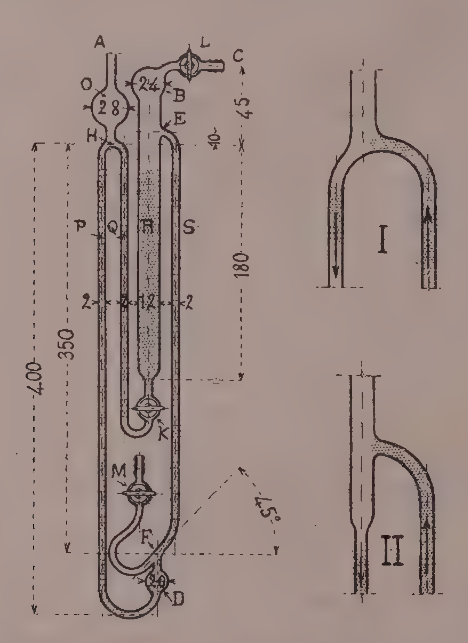
En vue de fournir aux laboratoires disposant de crédits restreints un moyen de faire des vides de l'ordre du centième de millimètre, nous avons mis au point un appareil de faible encombrement, peu fragile, et n'utilisant que 400^g de mercure environ; cet appareil est de construction relativement facile et fonctionne au moyen d'une trompe à eau ou d'une machine pneumatique ordinaire, car il ne nécessite qu'un vide auxiliaire de 60^{mm} à 80^{mm} de mercure. A partir d'un vide préliminaire de 200^{mm} on obtient en un quart d'heure environ le vide cathodique dans un récipient de 50^{cm^3}.

L'appareil est constitué par un réservoir cylindrique R, empli de mercure jusqu'au voisinage de E, qui alimente par le robinet K et le tube Q, la chute H de la trompe. Le tube de chute P recourbé à sa base se termine dans une ampoule D, qui communique en F avec le tube de remontage S. L'extrémité M de ce tube, munie d'un robinet, sert de rentrée d'air et l'autre extrémité aboutit en E au réservoir R dans lequel on fait le vide auxiliaire par l'ajutage C. Ce réservoir a une longueur de 20^{cm} environ au-dessous de E pour éviter l'entraînement de l'air par le mercure.

Le fonctionnement repose sur les différences de pression réalisées entre les points H, E et F. La pression en H est inférieure de plusieurs centimètres à la pression en E, ce qui permet l'écoulement du mercure par le tube Q; la pression en F est supérieure à la pression en E grâce à la rentrée d'air M qui effectue le remontage du mercure par S, mais comme cette rentrée d'air est très faible cette pression ne diffère

de la pression en H que d'une dizaine de centimètres; il reste ainsi sur le tube P un espace de 25^{cm} environ dans lequel se fait la chute rapide du mercure. On règle la vitesse de circulation du mercure à l'aide des robinets K et M.

Pour vider un récipient on le soude en A, on ferme les robinets K et M, puis on fait



le vide par C aussi loin que le permet l'appareil employé. Jusqu'à ce que la pression dans le récipient ait atteint une valeur voisine de celle du vide auxiliaire, les gaz s'échappent à travers le mercure de l'ampoule D; on ouvre alors le robinet K, puis un peu le robinet M et l'on ferme lentement le robinet L; la pression monte dans la trompe jusqu'à réaliser les conditions du fonctionnement.

Le vide étant fait dans le récipient, pour le remplir d'un gaz particulier, on amène ce gaz en M pendant le fonctionnement, puis on ferme K et L; le gaz rentrant en M refoule le mercure de l'ampoule D dans l'ampoule O, puis traverse ce mercure pour emplir le récipient. On remet ensuite en marche comme il est indiqué précédemment. Pour arrêter l'appareil à un instant quelconque, il suffit de fermer les trois robinets K, M, L dans cet ordre.

On peut facilement construire de tels appareils comportant plusieurs chutes et un seul tube de remontage, ou en grouper plusieurs en parallèle pour obtenir plus rapidement le vide.

Il importe de remarquer que la forme de la chute influe beaucoup sur la rapidité du fonctionnement : la forme adoptée (I) donne des chapelets très réguliers entre de larges limites de débit, tandis que la forme (II) ne posséderait cette régularité que pour un débit bien défini.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Relation entre la dilatation anomale et la variation thermique de l'aimantation des corps ferromagnétiques*. Note de M. **Chevenard**, transmise par M. Le Chatelier.

Pour interpréter l'action de la température sur les propriétés d'un corps ferromagnétique, j'ai déjà formulé l'hypothèse [1] d'une transformation progressive et réversible d'une forme α, stable au zéro absolu, en une forme isomorphe β, stable à chaud; à toute température θ, l'état du corps peut être caractérisé par la proportion x de la forme α.

Les données recueillies dans l'étude de la dilatation des ferronickels réversibles m'ont permis de tracer la courbe $x = f(\theta)$, pour les alliages à grande anomalie totale (voisins de Fe^2Ni); et j'ai trouvé que la *quantité x est sensiblement proportionnelle au carré de l'aimantation à saturation* I^2, *dans tout le domaine des températures inférieures au point de Curie*. J'ai pu, ensuite, vérifier indirectement la légitimité de cette loi pour la plupart des substances ferromagnétiques.

Dans cette Note, je me bornerai à exposer les bases expérimentales de la relation $x = \left(\frac{I}{I_0}\right)^2$, me réservant d'en étudier ultérieurement la signification physique.

J'admets qu'à une température quelconque, les volumes spécifiques V, V_α et V_β du ferronickel et de ses deux composants α et β sont reliés par une relation linéaire

$$V = xV_\alpha + (1 - x)V_\beta; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{V - V_\beta}{V_\alpha - V_\beta}.$$

Cette hypothèse est vraisemblable, car, au zéro absolu ($x = 1$), les volumes spécifiques des ferronickels réversibles, de Fe^2Ni au nickel, suivent très exactement la loi des mélanges.

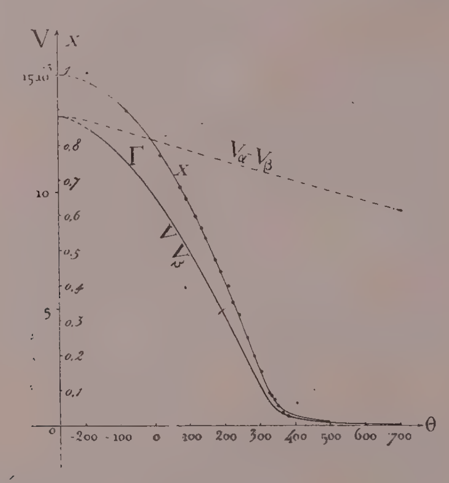
La quantité $V - V_\beta$ est représentée par la courbe différence Γ (voir la figure); celle-ci est obtenue, comme je l'ai exposé (*loc. cit.*), en rapportant la courbe expérimentale de dilatation à une courbe hypothétique normale, tracée par extrapolation de la première vers les températures basses. Au zéro absolu, $V - V_\beta$ et $V_\alpha - V_\beta$ ont pour valeur commune l'*anomalie totale*.

Si l'on peut évaluer la dilatabilité des deux formes α et β, on dispose donc de tous les éléments nécessaires au calcul de x, pour toutes les températures.

---

(1) P. Chevenard, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 594.

Or la courbe normale représente précisément la dilatabilité de la forme β, qui subsiste seule à haute température. Pour la forme α, il faut faire une hypothèse : j'ai admis que sa dilatabilité était peu différente de celle des ferronickels irréversibles (o à 30 pour 100 Ni) au-dessous du point allotropique Ar; de o à 30 pour 100 Ni, ces alliages, à l'état transformé, sont



Les courbes $V - V_\beta (\Gamma)$, $V_\alpha - V_\beta$ et x sont relatives à un ferronickel à 40,4 pour 100 Ni, et les points expérimentaux à un alliage à 40 pour 100 Ni étudié par Hegg.

dépourvus d'anomalie réversible, et leurs coefficients de dilatation linéaire, pour la température de 0°, s'écartent peu de $a = 10,5 . 10^{-6}$; $b = 4,3 . 10^{-9}$. J'ai attribué la même dilatabilité à la forme α des réversibles compris entre 32 et 45 pour 100 de nickel. Comme l'anomalie de ces alliages est considérable, l'erreur commise sur la dilatation de α retentit peu sur la valeur de $V_\alpha - V_\beta$, et le diagramme x peut être tracé avec assez de certitude.

Or, pour les températures inférieures au point de Curie, et moyennant une réduction convenable de l'échelle des ordonnées, les courbes x coïncident sensiblement avec celles de la variation thermique du carré de l'aimantation à saturation I^2, établies par Hegg [1]. Ainsi, dans la figure, les points expérimentaux représentent les données qu'il a obtenues pour un

---

[1] F. Hegg, *Thèse*, Zurich, 1910. En réalité, le nombre x s'écarte sensiblement du rapport $\left(\frac{I}{I_0}\right)^2$ donné par Hegg, car celui-ci a extrapolé ses courbes jusqu'au zéro absolu d'après une loi toute différente de celle que j'ai admise. Mais la concordance s'établit si l'on restreint la comparaison des deux propriétés au domaine de températures réellement exploré.

alliage sensiblement identique par sa composition à celui dont j'ai étudié la dilatation : seul le point relatif à la température de l'air liquide se dispose à quelque distance de la courbe x; mais cet écart s'explique suffisamment par l'incertitude du tracé de la courbe normale aux très basses températures.

Pour les ferronickels à faible anomalie totale (plus de 50 pour 100 Ni), les erreurs qui affectent le calcul de x prennent une importance relative considérable, et il serait vain de chercher une vérification quantitative de la relation $x = \left(\frac{I}{I_0}\right)^2$. Mais il est possible d'en prouver indirectement la validité.

En effet, sauf au voisinage du zéro absolu, la dilatation d'une substance normale peut être représentée, avec une grande approximation, par une formule parabolique de la température θ. La différence $V_\alpha - V_\beta$ des volumes spécifiques des deux formes normales α et β est donc une fonction du second degré en θ, et *il doit en être de même du quotient* $(V - V_\beta) : \left(\frac{I}{I_0}\right)^2$, *si la relation* $x = \left(\frac{I}{I_0}\right)^2$ *est exacte*. Or cette prévision se vérifie très sensiblement, non seulement pour les ferronickels tenant plus de 50 pour 100 Ni, mais encore pour le fer α, la cémentite, la magnétite, les alliages fer-cobalt, fer-chrome, nickel-cobalt.

Ainsi, malgré la diversité de leurs aspects, les anomalies de dilatation de la plupart des corps ferromagnétiques peuvent être interprétées à l'aide de la même conception. L'anomalie est dite *négative* quand V_α est constamment supérieur à V_β : (Fe^2Ni, Fe^3C, etc.) et *positive* dans le cas contraire (Fe^3O^4, Ni, alliages Ni-Co). Mais, pour certains corps à faible anomalie totale (par exemple, ferronickel à 68,0 pour 100), la différence des dilatabilités des deux formes α et β suffit à inverser le signe de $V_\alpha - V_\beta$ quand la température s'élève : suivant la valeur de celle-ci, l'anomalie est donc positive ou négative. Ces considérations font rentrer dans la loi générale des courbes d'anomalie dont l'allure semblait assez énigmatique de prime abord.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Action de l'acide borique sur la glycérine et les alcools polyvalents. Application d'une nouvelle méthode de volumétrie physico-chimique.* Note [1] de M. **René Dubrisay**, présentée par M. H. Le Chatelier.

On sait qu'il est possible de titrer l'acide borique par alcalimétrie si l'on ajoute dans les solutions un excès d'alcool polyvalent [2] : il est naturel d'attribuer cette particularité à la formation d'une combinaison susceptible de donner avec les alcalis des sels moins hydrolysables que les borates. Divers auteurs [3] ont cherché à vérifier cette hypothèse au moyen de mesures physico-chimiques, en employant soit la méthode des conductibilités électriques, soit la méthode cryoscopique. J'ai pensé à appliquer à l'étude de ce problème le procédé d'analyse basé sur l'observation des phénomènes de miscibilité que j'ai décrit dans des Communications antérieures [4].

Dans ce but, je mêle en proportions variables des solutions à titre connu d'acide borique et de glycérine et, sur la liqueur ainsi préparée, je détermine la température de miscibité avec le phénol. Les résultats sont consignés dans le Tableau suivant :

Tableau I.

Solutions d'acide borique et de glycérine à $\frac{1}{3}$ de molécule par litre.

x = volume de solution d'acide,
$100 - x$ = volume de solution de glycérine,
T_0 = température de miscibilité observée,
T_c = température calculée par la règle d'additivité,
$e = T_0 - T_c$: écart correspondant.

x.	T_0.	T_c.	e.
0	68,4	68,40	0
33,3	66,0	65,93	+0,07
50	64,6	64,70	−0,10
66,6	63,5	63,46	+0,04
75	62,9	62,85	+0,05
100	61,0	61,00	0

(1) Séance du 13 juin 1921.

(2) Jörgensen, *Cent. Blatt.*, 1895. — Copaux, *Comptes rendus*, 1898, et *Bull. Soc. chim.*, 1909.

(3) Magnanini, *Gaz. Chim. ital.*, 1890 et 1891. — Boeseken, *Revue des Travaux chimiques des Pays-Bas*, t. 30, 1911; t. 34, 1915; t. 35, 1916.

(4) René Dubrisay, *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1582; *Bull. Soc. chim.* mai 1919 et février 1921.

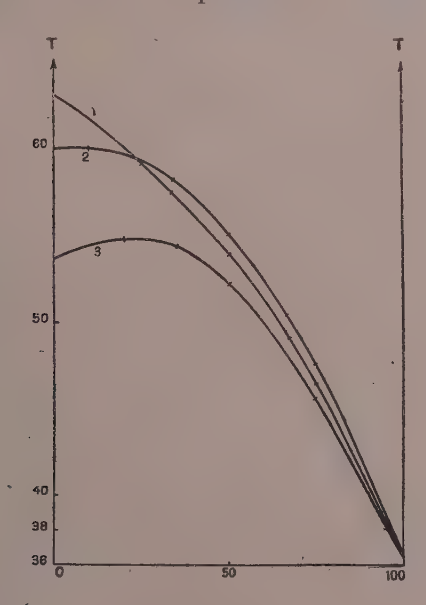
Les écarts entre les températures observées et les températures calculées sont nuls ou du moins inférieurs aux erreurs d'expérience : aucune combinaison ne paraît donc se former.

Il en va autrement dans le cas du système mannite-acide borique, ainsi qu'il ressort des chiffres du Tableau II :

TABLEAU II.

x.	T_0.	T_c.	e.
0	69,2	69,2	0
40	67,9	68,52	0,62
50	67,6	68,35	0,75
60	67,4	68,18	0,78
66,6	67,3	68,06	0,76
100	67,5	67,5	0

Ici les écarts sont nets et laissent présumer la formation d'un composé de



mannite et d'acide borique [1] : mais la courbe que l'on peut tracer pour représenter les résultats n'a pas de points anguleux, ce qui indique que la combinaison est dissociée.

---

[1] Cette conclusion doit être rapprochée du travail de Fox et Garge (*Chem. Soc. of London*, 1911) qui décrivent une combinaison d'acide borique et de mannite obtenue en mêlant les solutions alcooliques des deux corps. Cette combinaison, qui contient une molécule d'acide pour une de mannite, se décompose en solution aqueuse.

J'ai étudié ensuite l'action de l'acide borique et de la glycérine en présence de soude.

Pour cela, je mêlais à une solution de soude $\frac{N}{5}$ des liqueurs tenant en solution par litre 10g d'acide borique cristallisé et des proportions variables de glycérine.

Les résultats sont consignés dans le Tableau suivant et représentés sur la figure.

TABLEAU III.

Action d'une solution de soude $\frac{N}{5}$ sur les liqueurs contenant par litre 10g d'acide borique cristallisé et des proportions variables de glycérine.

P = poids de glycérine par litre,
x = volume de solution de soude,
$100 - x$ = volume de solution acide.

P = 30 (courbe 1).		P = 60 (courbe 2).		P = 100 (courbe 3).	
x.	T.	x.	T.	x.	T.
0	63,2	0	60,0	0	53,8
25	59,2	10	60,2	20	54,9
33,33	57,6	25	59,4	33,33	54,5
50	54,6	33,33	58,2	50	52,2
66,66	49,0	50	55,1	66,66	48,2
75	46,5	66,66	50,5	75	45,7
100	36,5	75	47,7	100	36,5
–	–	100	36,5	–	–

L'allure de la courbe 2 et surtout de la courbe 3 concorde bien avec l'existence d'une combinaison de glycérine, d'acide et de soude. Toutefois, puisqu'on n'observe aucun point anguleux, cette combinaison est certainement dissociée : sa formation n'apparaît même pas sur la courbe 1.

J'ai obtenu des courbes tout à fait analogues dans l'étude du système mannite, acide borique, soude.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influence du corroyage sur la résistivité de l'acier.* Note de M. **Eugène-L. Dupuy**, transmise par M. H. Le Chatelier.

Lorsque l'on transforme en fil par étirage à froid une barre d'acier laminé, on constate que la résistance électrique décroît au fur et à mesure que la section diminue.

Nous avons obtenu, par exemple dans une série de mesures, les valeurs suivantes :

Nature du métal.	Carbone pour 100.	Résistivité (microhms : cm³). Barre initiale D = 6mm.	Fil D = 1mm,5.
Acier mi-dur	0,35	25,2	20,8
Acier dur	0,79	27,0	21,0

L'examen microscopique de la barre avant étirage montre qu'elle est constituée par des zones de ferrite et de perlite uniformément réparties sans orientation visible. Le passage par la filière provoque un alignement de ces zones qui s'allongent et se transforment en longs filaments. A ce changement de structure correspond, comme le calcul permet de le voir, une diminution de la résistivité. En effet, dans le premier cas, on peut admettre que tout se passe comme si pour une moitié de la section les éléments de ferrite et de perlite étaient en série, et comme s'ils étaient en parallèle pour le reste de la section; après étirage, ces éléments seront au contraire tous en parallèle.

Cette explication n'est cependant pas suffisante : en effet, si, par un recuit à 800° suivi d'un refroidissement à vitesse convenable, on fait recristalliser le métal, l'alignement des grains de perlite disparaît et l'on retrouve une structure micrographique semblable à celle qu'avait la barre initiale. Or, après ce traitement, la variation de résistivité persiste, quoique sensiblement atténuée.

Nous avons obtenu, pour les fils que nous avons cités plus haut, les variations suivantes :

Nature du métal.	Carbone pour 100.	Résistivité après recuit. Barre initiale.	Fil.
Acier mi-dur	0,35	22,0	21,6
Acier dur	0,79	21,7	20,9

L'attaque par le réactif au cuivre d'une coupe longitudinale du fil montre la persistance après recuit des bandes colorées mises en évidence par ce réactif et dues, comme l'a montré M. H. Le Chatelier, à la présence d'oxyde de fer en solution.

Une partie de la résistivité du métal serait donc due à la présence de cet oxyde.

Cette hypothèse permettrait de comprendre pourquoi, alors que l'extrapolation à l'origine des formules donnant la variation de résistivité du fer en fonction de la teneur en élément ajouté conduit à des valeurs peu

supérieures à 7 microhms : cm^3, on obtient pratiquement des résistivités sensiblement plus élevées. Cet écart serait dû à la présence de l'oxyde, d'autant plus difficile à éliminer que le métal est moins carburé.

CHIMIE. — *Sur le carbonate d'argent ammoniacal.* Note de MM. **Dervin** et **Olmer**, présentée par M. G. Lemoine.

Le carbonate d'argent ammoniacal n'a été signalé que par Kern [1] qui l'obtint en poudre, de formule $Co^3Ag^2, 4AzH^3$, en précipitant par l'alcool absolu la solution ammoniacale de carbonate d'argent. Plus tard, Bruni et Levi [2] n'ont pas pu l'obtenir en faisant passer de l'ammoniac sur du carbonate d'argent. Au cours de recherches actuellement en cours sur l'argent fulminant et qui feront l'objet d'une Note ultérieure, nous l'avons obtenu accidentellement par l'action de l'anhydride carbonique de l'air sur la dissolution de l'argent fulminant dans l'ammoniaque concentrée.

Nous avions remarqué que l'argent fulminant obtenu par l'évaporation à l'air de la dissolution d'oxyde d'argent dans l'ammoniaque se dissolvait dans l'acide sulfurique étendu avec dégagement d'anhydride carbonique; ce fait qu'il était facile de prévoir n'a pas été signalé par les auteurs qui se sont occupés de l'argent fulminant.

La carbonatation lente à l'air atmosphérique de la solution ammoniacale d'oxyde d'argent s'effectue avec une telle facilité que nous avons pu, par dissolutions de l'argent fulminant dans l'ammoniaque, suivies d'évaporations spontanées, transformer en carbonate ammoniacal 94 pour 100 de l'oxyde d'argent en quatre opérations seulement, les 6 pour 100 restants se trouvant à l'état d'argent métallique.

Ayant à notre disposition une assez grande quantité de cette solution, nous en avons profité pour étudier le carbonate ammoniacal insuffisamment décrit. La dissolution, filtrée de l'argent métallique, a été laissée à l'obscurité dans une cloche contenant de la chaux vive et du sel ammoniac. Elle nous a donné de beaux cristaux incolores, de forme hexagonale très régulière, transparents, de 3^{mm} à 4^{mm} de côté; les deux bases sont très développées, le prisme très court avec en biseau les faces de la pyramide. Ces tables sont formées d'associations complexes de cristaux optiquement

---

[1] Kern, *Chem. N.*, t. 31, 1875, p. 231.

[2] Bruni et Levi, *Gazz. chim. ital.*, t. 46, 1916.

positifs, à deux axes optiques rapprochés, présentant une forte dispersion, avec $\rho < \nu$.

Ces cristaux jaunissent à l'air en perdant de l'eau et de l'ammoniac et en donnant du carbonate d'argent, *qui garde la forme des cristaux de carbonate ammoniacal*. Ils noircissent à la lumière. On peut les conserver à l'obscurité dans un petit tube scellé. Ils sont très solubles dans l'eau ; la solution abandonnée à l'air perd de l'ammoniac et le carbonate d'argent se dépose cristallisé ; à chaud, la liqueur noircit et le carbonate d'argent est mêlé d'argent métallique. De même la dissolution ammoniacale, évaporée lentement à l'air atmosphérique, donne de petits cristaux jaunes, transparents, en forme d'aiguilles associées, de carbonate d'argent.

L'analyse a été faite en dosant l'argent soit à l'état de chlorure, soit à l'état métallique, l'ammoniac à l'état de chloroplatinate ; la présence de l'eau a été contatée ; on l'a dosée par différence entre la perte dans le vide sulfurique et le poids d'ammoniac ; l'anhydride carbonique a été obtenu par calcination du carbonate. Ces analyses conduisent à la formule CO^3Ag^2, $4AzH^3$, H^2O :

	Trouvé.		Calculé pour CO^3Ag^2, $4AzH^3$, H^2O.
Argent	59,45	59,82	59,67
Ammoniac	18,61	18,68	18,78
$CO^2 + O$	»	16,35	16,58
Eau	»	5,12	4,97
		99,97	100,00

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur le rôle des impuretés gazeuses dans l'oxydation catalytique du gaz ammoniac.* Note de M. **Eugène Decarrière**, présentée par M. A. Haller.

La présente Note fait suite à l'*Étude de l'oxydation catalytique de l'ammoniaque*, faite en commun avec M. Pascal et parue au *Bulletin de la Société chimique de France* du 6 janvier 1919 où l'on trouvera une description succincte de la méthode et du dispositif employés ; elle résume une première série d'expériences relatives à l'influence des impuretés gazeuses qui accompagnent l'ammoniac obtenu industriellement en partant de la cyanamide calcique.

Le catalyseur est constitué par $1^g,95$ de feuilles de platine, froissées en boulettes, formant à l'intérieur d'un tube de quartz de $2^{cm^2},50$ de section un tampon de $1^{cm},5$ de

longueur, très perméable aux gaz. Le mélange d'air et d'ammoniac renfermant environ 8,3 pour 100 de ce dernier gaz en volume reçoit l'impureté gazeuse, dosée à l'aide d'un tube capillaire étalonné, puis pénètre dans le tube de quartz à la vitesse de 10 litres en 12 minutes 30 secondes, vitesse suffisamment faible pour qu'on puisse assister en quelque sorte à l'empoisonnement progressif du catalyseur. La température, réglée de façon à atteindre son maximum, 708°-710°, à l'endroit où se trouve le platine, est déterminée de part et d'autre par un mode de chauffage, toujours le même, qui permet d'éviter les condensations dans le tube et d'obtenir que l'échauffement préalable du mélange gazeux soit sensiblement le même dans toutes les expériences.

L'action de l'hydrogène sulfuré a été étudiée en premier lieu; mais, ce gaz se dissociant partiellement avant l'arrivée au catalyseur avec dépôt de soufre et mise en liberté d'hydrogène qui s'oxyde en même temps que l'hydrogène sulfuré restant, l'influence de l'hydrogène a été étudiée séparément dans la même série d'expériences. D'après les résultats qui sont donnés ci-dessous et qui ont été fournis par deux échantillons de platine, alors qu'une faible dose d'hydrogène (0,44 pour 100) accroît l'activité du catalyseur, une dose beaucoup plus considérable (1 à 1,5 pour 100) abaisse le rendement en diminuant la proportion d'oxygène disponible pour l'oxydation du gaz ammoniac.

H pour 100^{vol} du mélange.	Temps de passage de ce mélange depuis l'expérience précédente.	H pour 100 pendant l'expérience.	Rendement pour 100.
Échantillon n° 1.			
	h m		
0	0.00	0	95,7
0,44	0.10	0,44	100
1,3	0.10	1,3	93,8
1,3	3.00	0	95,3
Échantillon n° 2.			
0	0.00	0	96,5 et 96,3
1,0	0.10	1,0	94,8
1,0	3.00	1,0	94,8
0	0.10	0	95,4

Dans le cas de l'action de l'hydrogène sulfuré, les expériences ont été faites sur un même échantillon de platine pendant que la dose indiquée d'impureté gazeuse était présente dans le mélange.

H^2S pour 100^vol du mélange.	Temps de passage de ce mélange depuis l'expérience précédente.	Rendement pour 100.
	h m	
0	0.00	95,3
0,11	0.10	95,4
0,11	5.10	91,3
0	3.00	95,3
0,37	3.10	93,7
0	4.20	93,8
2,0	0.10	77,8
2,0	2.05	73,1
1,6	<0.10	79,6
1,0	3.00	86,4
1,0	3.00	90,3
1,0	2.30	90,0
2,0	1.15	79,4
0	5.00	82,6
0	2.30	87,8
0	7.30	86,2
0	23.00	87,0

Les nombres du Tableau précédent, relatifs à une durée totale de fonctionnement de plus de 60 heures, montrent que l'activité du catalyseur est progressivement mais non définitivement amoindrie, puisqu'une diminution de la dose d'hydrogène sulfuré provoque un relèvement du rendement; et l'on peut dire que la baisse finale de rendement, pour une dose donnée, dépend beaucoup moins de la quantité absolue du gaz nocif qui a passé que de la proportion actuelle de ce gaz.

Pendant les périodes d'intoxication à forte dose, à 2 pour 100 par exemple, un peu moins de la moitié du soufre est transformée en acide sulfurique; pendant les périodes de désintoxication par le passage du mélange (air + NH^3), du soufre se dépose à la sortie du tube. Signalons pour terminer que l'échantillon de platine précédent, dont le rendement n'avait pu être relevé que de 73,1 à 87,0 pour 100 en présence de doses diminuées puis nulles d'hydrogène sulfuré, a été finalement soumis à l'action de l'hydrogène à la dose 1,25 pour 100 et a donné 90,2 et 90,3 au bout de 3 heures, 91,6 après un nouveau passage de 3 heures, l'hydrogène n'étant pas présent dans le mélange pendant les expériences. On voit que le soufre est mieux entraîné par l'hydrogène que par l'air et que, si l'action d'une très forte dose d'hydrogène sulfuré se traduit par une fatigue finale du catalyseur, ce gaz a des propriétés nocives considérablement

moindres que celles qu'on lui attribue d'ordinaire, sa proportion étant au maximum 0,002 pour 100 dans l'opération industrielle avec l'emploi de cyanamides non préalablement mouillées.

On ne saurait en dire autant d'autres impuretés gazeuses tout aussi courantes dont la toxicité est particulièrement grande.

GÉOLOGIE. — *Remarques générales sur la tectonique de la zone prérifaine du R'arb septentrional* (*Maroc*). Note de M. **Léon Lutaud**, présentée par M. Émile Haug.

Dans une Note précédente ([1]), j'ai montré par quelques observations de détail que le R'arb septentrional devait être considéré comme une région de charriages. Cette conclusion est analogue à celle formulée déjà par divers auteurs pour d'autres parties du Maroc septentrional et qui a été très contestée. Elle se heurte donc aux mêmes objections que je désire d'abord discuter.

Il résulte de mes levés que tout un ensemble de terrains, formé de Trias, de Nummulitique et de Burdigalien, repose en recouvrement anormal sur un soubassement d'argiles grises que j'ai rapportées à l'Helvétien. Cette attribution est à coup sûr précaire, car elle ne s'appuie ici sur aucune preuve paléontologique précise : elle est acceptée cependant par beaucoup de géologues, en se fondant sur la continuité qui relie ces terrains à des formations très semblables dont l'âge helvétien a été reconnu. Au surplus, depuis mon voyage, des études de détail ont été poursuivies dans le R'arb et apporteront bientôt, je l'espère, les précisions désirables. Cependant M. A. Brives a récemment rappelé ([2]) qu'il considérait les argiles grises comme suessoniennes et constituant la base normale des marnes blanches à silex de l'Éocène. Cette opinion ne s'appuie pas davantage sur des données paléontologiques : la discussion, sur ce point, ne peut donc aboutir pour le moment.

L'attribution des argiles grises au Suessonien ne saurait en soi modifier le problème, puisque, d'après mes observations, le Trias les recouvrirait, surmonté lui-même par les marnes blanches éocènes.

La position anormale et le broyage mécanique du Trias étant incontestables et ayant déjà été signalés en d'autres points du Maroc, certains

([1]) *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1510.
([2]) *C. R. somm. S. G. F.*, 2 mai 1921, p. 128.

géologues, qui ne croient pas à l'existence de charriages dans la région, ont pensé que le Trias se serait élevé de la profondeur à la faveur de failles et de phénomènes de « diapirisme » (¹).

La notion du Trias intrusif ne peut en aucune façon s'appliquer à la région que j'ai étudiée. La multiplicité des lambeaux triasiques et leur disposition supposeraient tout un réseau de failles nombreuses et complexes : or je n'en ai jamais observé aucune qui fût en relation avec les affleurements du Trias. De plus, on ne connaît pas le soubassement des argiles grises : il se peut que le Trias existe en profondeur, mais il est probable qu'une importante série sédimentaire le sépare de la surface, ce qui rend tout à fait hypothétiques les possibilités mécaniques de son intrusion ascensionnelle.

A la vérité, le Trias est beaucoup plus *continu* sous les marnes blanches éocènes et le Burdigalien qu'on ne serait tenté de le croire à première vue. Ses affleurements sont d'autant plus fréquents et plus importants que les massifs éocènes et burdigaliens sont eux-mêmes plus nombreux et plus étendus : ceci est déjà en faveur d'une relation directe entre l'existence de ces trois termes. En outre, le Trias n'est pas seulement localisé à l'état de lambeaux broyés *sur la bordure* de ces massifs, à leur contact avec les argiles grises; il continue en profondeur, surtout sous les marnes et les grès de l'Éocène, et l'érosion, en de nombreux points (dans la région du djebel Sarsar notamment), y a mis à jour le Trias sous-jacent; parfois même, *sous ce dernier*, les argiles grises apparaissent localement en petites « fenêtres », là où le travail de l'érosion est poussé plus loin. Je demeure donc convaincu que le Trias repose en nappe sur les argiles grises, que celles-ci soient suessoniennes ou helvétiennes.

J'ajouterai que l'existence du charriage n'est pas seulement fondée sur l'étude stratigraphique et la position relative des différents terrains. Elle résulte tout autant, à mes yeux, de la nature des phénomènes mécaniques que l'on peut observer, et qui sont à tous égards analogues à ceux que l'on connaît dans d'autres régions, où l'existence des charriages a été clairement mise en évidence (brèches mécaniques, lambeaux de poussée, lames enrobées, etc.).

Voici, en résumé, l'idée d'ensemble que je me suis faite, dès 1918, de la structure du R'arb septentrional :

(¹) Voir notamment, pour la région du R'arb, A. Brives, *C. R. somm. S. G. F.*, 7 mars 1921, p. 56.

Un soubassement continu et homogène d'argiles grises est recouvert par une nappe complexe formée de Trias (à la base), de Nummulitique et de Burdigalien. Il existe une incontestable indépendance entre ces trois termes charriés : le premier est complètement écrasé, broyé; le second, moins morcelé, est souvent énergiquement plissé; le troisième, beaucoup plus tranquille, est discordant sur les deux autres. Il est donc permis de considérer la nappe comme constituée de trois unités tectoniques indépendantes, probablement décollées, le Trias formant une nappe inférieure, que son écrasement peut faire comparer à une véritable brèche mécanique de base.

La poussée est dirigée du Rif vers le S et le SW. Ce que l'érosion a laissé subsister de la nappe permet de croire que le front de nappe suivait assez exactement le mouvement d'incurvation vers le nord de l'arc Rifain. N'ayant pu, en 1918, dépasser vers le nord et l'est la limite que j'ai précédemment indiquée [1], j'éviterai d'émettre une hypothèse concernant l'amplitude du phénomène de recouvrement et la zone des racines. L'âge des charriages est évidemment postérieur à l'Helvétien — s'il se confirme que les argiles grises appartiennent à cet étage — et antérieur au Sahélien, donc nettement miocène.

Les terrains en recouvrement forment des massifs importants dans le nord et l'est de la région que j'ai parcourue (Dj. Sarsar, Nador, Mzoufroun, Sidi Ameur el Hadi). Au sud et à l'ouest, c'est-à-dire dans la zone plus externe, ils ne forment plus que de petits massifs isolés ou des klippes (Dj. Kourt, El Aloua, lambeaux éocènes et burdigaliens de Souk el Arba, cote 188, cote 196, etc.). Cette disposition est fonction — mais en partie seulement — de l'érosion.

Mes observations sur les phénomènes de charriage dans la partie septentrionale du R'arb prérifain viennent à l'appui de l'opinion émise par M. le professeur Gentil à la suite de ses explorations au Tselfatt, au Zerhoun et au seuil de Taza [2]. En ce dernier point, notamment, M. Gentil a montré que des nappes, venues des régions inexplorées du Rif, étaient poussées vers le sud sur les argiles helvétiennes du détroit Sud-Rifain. Il avait même émis l'hypothèse que des nappes prérifaines devaient exister sur toute la zone externe de l'arc Rifain, jusqu'au détroit de Gibraltar.

---

(1) *Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 1510.

(2) L. Gentil, M. Lugeon et L. Joleaud, *Comptes rendus*, t. **166**, 1918, p. 217, 290, 472 et 614. — L. Gentil, *Voyage géologique à Taza* (*B. S. G. F.*, 4e série, t. **18**, 1918, p. 129-177).

D'un autre côté, R. Douvillé et Nicklès ont établi l'existence de nappes de charriage, poussées vers le Guadalquivir, dans la zone externe de l'arc Bétique. Sans vouloir généraliser d'une manière prématurée, dans un pays où les observations sont encore incomplètes et imprécisées, il est permis de penser qu'un même régime tectonique, caractérisé par la présence de nappes poussées vers la zone externe, doit exister tout le long de l'important système orographique bético-rifain.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur la valeur phylogénétique et évolutive des formules lamellaires des dernières molaires* $M\frac{1}{1}$, $M\frac{2}{2}$, $M\frac{3}{3}$ *des mastodontes et des éléphants*. Note (1) de M. **Sabba Stefanescu**.

Les paroles de Gaudry (2) : « Supposons toujours que les collines continuent à se multiplier, à s'exhausser, l'*Elephas meridionalis* deviendra à son tour un *Elephas antiquus* ou un éléphant du type de l'Inde », précisent suffisamment la méthode suivie par les paléontologistes, pour établir la phylogénie et l'évolution des mastodontes et des éléphants. *L'augmentation du nombre des collines ou lames*, habituellement rendue en *formules lamellaires*, serait donc, pour tous les paléontologistes qui m'ont précédé, le criterium qui indiquerait à la fois et la filiation et l'évolution de ces proboscidiens.

Or, d'après mes observations, les formules lamellaires sont dénuées d'importance phylogénétique, parce qu'elles ne nous renseignent pas sur les caractères morphologiques qui nous révèlent, d'après l'étude des molaires, la parenté des animaux en question. Quant à l'importance évolutive de ces formules, elle ne saurait être mise en évidence que si la condition *sine qua non* que le phylum des genres et des espèces qu'elles représentent est connu.

I. Pour rechercher le phylum, nous pratiquons la méthode de la morphologie phylogénétique, qui consiste à suivre la variation des caractères morphologiques phylogénétiques, à savoir : *la composition bituberculaire, la différenciation dissemblable, et la disposition non alterne ou en apparence alterne des deux tubercules congénères de chaque colline ou lame*.

Une fois le phylum déterminé, pour repérer les genres et les espèces,

(1) Séance du 13 juin 1921.

(2) *Les enchaînements du monde animal dans les temps géologiques*, Mammifères tertiaires, 1878, p. 179.

c'est-à-dire pour fixer leurs places dans le phylum, d'après leur degré d'évolution, nous utilisons les formules lamellaires.

D'ailleurs l'importance scientifique de ces formules n'est pas exempte de toute objection fondée, du moment qu'une seule et même espèce peut être représentée par deux ou trois formules différentes, d'après les auteurs, comme par exemple *Stegodon insignis*, dont les trois formules lamellaires sont $\frac{7}{7}, \frac{8}{8-9}, \frac{10-11}{11-13}$, d'après Falconer [1], $\frac{7-8}{7}, \frac{7-8}{7-12}, \frac{10-11}{11-13}$, d'après Lydekker [2] et $\frac{7-8}{7-10}, \frac{7-8}{8-12}, \frac{9-11}{9-13}$ d'après Andrews [3].

II. Pour éviter la confusion qui peut résulter de l'emploi des diverses formules lamellaires établies par divers auteurs, j'ai eu en vue uniquement les formules d'un seul auteur; j'ai additionné les termes de chaque formule, qui se réduisent à un seul nombre. Les formules publiées par Andrews forment alors la série que voici :

Tetrabelodon angustidens	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4-5}{4-5}$	: $\frac{11}{11}$	22.
Mastodon Cautleyi	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{5}$	: $\frac{13}{13}$	26.
Tetrabelodon longirostris	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5-6}{5-6}$	: $\frac{14}{14}$	28.
Mastodon latidens	$\frac{4}{4}$	$\frac{4-5}{4-5}$	$\frac{5-6}{5-6}$	: $\frac{15}{15}$	30.
Elephas (Stegodon) Clifti	$\frac{6-7}{?}$	$\frac{6}{?}$	$\frac{7-8}{7-8}$	: $\frac{21}{?}$	?.
Elephas (Stegodon) bombifrons	$\frac{6}{7}$	$\frac{6-7}{7-8}$	$\frac{8-9}{8-9}$	: $\frac{22}{24}$	46.
Elephas (Stegodon) insignis	$\frac{7-8}{7-10}$	$\frac{7-8}{8-12}$	$\frac{9-11}{9-13}$	: $\frac{27}{35}$	62.
Elephas planifrons	$\frac{7}{7}$	$\frac{8-9}{8-9}$	$\frac{10-12}{10-13}$	: $\frac{28}{29}$	57.

III. Pour que cette série soit entièrement phylogénétique et évolutive, il faudrait que tous les genres et toutes les espèces dont elle est formée appartiennent à un seul et même phylum. Or, cette condition n'est pas remplie, donc la série n'est pas phylogénétique, et par conséquent pas évolutive en totalité, et voilà pourquoi :

a. D'après Lydekker [4], *Tetrabelodon angustidens* serait la souche ances-

---

(1) *Palaeontological Memoirs*, vol. 2, 1868, p. 86.

(2) *Palaeontologia Indica*, 10e série, vol. 1, Part 5, 1880, p. 273-292.

(3) *A Guide to the Elephants*, 1908, p. 46.

(4) *Op. cit.*, 10e série, vol. 3, 1884-1886, p. XVIII.

trale du phylum : *Tetrabelodon longirostris* → *Mastodon Cautleyi* → *Mastodon latidens*. Mais les collines de *Mastodon Cautleyi* ne sont pas des collines de *Tetrabelodon longirostris* différenciées régressivement; *le phylum précité n'est donc pas naturel*. Par suite, il ne peut être question de l'évolution de ces espèces, et les formules lamellaires qui les représentent, tant au point de vue de la phylogénie qu'à celui de l'évolution, sont sans valeur.

b. D'après tous les paléontologistes, *Mastodon latidens* et *Mastodon elephantoides* [= *Elephas* (*Stegodon*) *Clifti*] seraient les espèces de passage de *Mastodon* à *Elephas* (*Stegodon*). Mais le fait que les molaires de *Mastodon elephantoides* [= *Elephas* (*Stegodon*) *Clifti*] ont des collines plus nombreuses que les molaires de *Mastodon latidens* n'est pas une preuve décisive que ces deux espèces sont liées phylogénétiquement. Cette observation est d'autant plus justifiée que, sur les figures des molaires de *Mastodon elephantoides* publiées par Clift [1], Owen [2] et Gaudry [3], on ne peut discerner la composition bituberculaire des collines, très manifeste sur les figures des molaires de *Mastodon latidens*, publiées par Clift, Owen et Falconer [4]. Puisqu'il n'est pas certain que les collines de *Mastodon elephantoides* soient des collines de *Mastodon latidens* différenciées régressivement, la filiation de ces espèces n'est pas rigoureusement démontrée. En outre, la synonymie *Mastodon elephantoides* Clift [= *Elephas* (*Stegodon*) *Clifti* Falconer] est discutable, parce que, au point de vue des caractères morphologiques phylogénétiques des collines ou lames, les figures des molaires de *Mastodon elephantoides* publiées par Clift diffèrent de celles d'*Elephas* (*Stegodon*) *Clifti* publiées par Falconer [5].

c. D'après tous les paléontologistes, *Elephas* (*Stegodon*) *insignis* et *Elephas planifrons* seraient les espèces de passage d'*Elephas* (*Stegodon*) à *Elephas*. Mais cette filiation n'est pas réelle, pour les motifs suivants :

1° L'*Elephas* (*Stegodon*) *insignis* et l'*Elephas planifrons* n'appartiennent pas à un seul et même phylum. Les lobes et les expansions des lames des

---

(1) *On the Fossil Remains of two New Species of Mastodon* (*Geological Transactions*, 2e série, vol. 2, 1828, p. 369).

(2) *Odontography*, vol. 2, pl. 145, 1840-1845.

(3) *Op. cit.*, p. 176.

(4) *Fauna Antiqua Sivalensis*, Part 4, pl. 30, fig. 6.

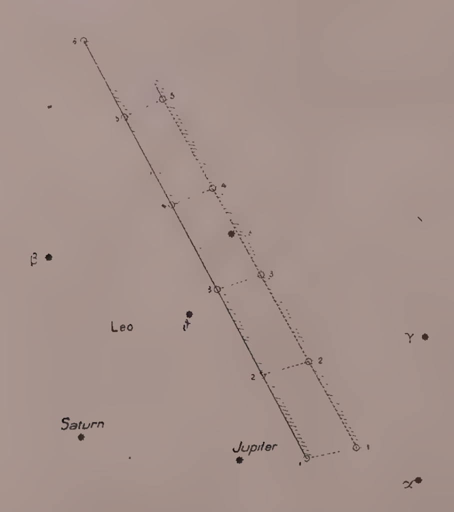
(5) *Ibid.*, fig. 5.

molaires d'*Elephas planifrons* (¹) n'existent pas chez les lames d'*Elephas* (*Stegodon*) *insignis*, de sorte que les lames d'*Elephas planifrons* ne sont pas des lames d'*Elephas* (*Stegodon*) *insignis* différenciées régressivement.

2° Si vraiment l'*Elephas planifrons* descend de l'*Elephas* (*Stegodon*) *insignis*, sa formule lamellaire devrait être progressive par rapport à celle d'*Elephas* (*Stegodon*) *insignis*, et non régressive.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur l'aurore boréale du 13 mai 1920.* Note (²) de M. **Carl Störmer.**

Malgré la nuit d'été si courte, nous avons réussi, mes assistants et moi, à prendre toute une série de photographies de l'aurore boréale du 13 mai dernier. Les stations Bygdö, Kristiania, Kongsberg et Oscarsborg furent en action et, comme résultat, nous avons une vingtaine de photographies simultanées de deux stations pour déterminer l'altitude et la situation de l'aurore et une dizaine de photographies de couronnes d'aurore pour déterminer le point de radiation des rayons auroraux.



Parmi les photographies prises de deux stations, il y en a une qui mérite une mention particulière : C'est un photogramme d'un long rayon auroral,

(¹) *Fauna Antiqua Sivalensis*, Part 1, pl. 11-12, et Part 2, pl. 19-20.

(²) Séance du 20 juin 1921.

photographié simultanément par M. Tveter à Kristiania et M. Bjerke à Oscarsborg, à $11^h 4^m 24^s$, temps de Greenwich. (Distance Kristiania-Oscarsborg 27360^m, l'azimut d'Oscarsborg vu de Kristiania égal à $13°1'20''$ vers l'Ouest.) Sur la figure on voit la situation de ce rayon parmi les étoiles, celle vue de Kristiania en traits pleins, celle d'Oscarsborg en traits pointillés.

Nous avons choisi le long du bord gauche une série de points, marqués par les nos 1, 2, 3, 4, 5 et 6, dont les points correspondants vus de l'autre station sont marqués par les nos 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, le point correspondant au point 6 étant en dehors du champ de la photographie prise d'Oscarsborg.

Voici les résultats du calcul de la hauteur et la situation de ces points :

N°.	*h*.	*a*.	H.	D.
1...........	19,3	78,3	192	482
2...........	24,4	76,1	237	466
3...........	29,5	73,7	280	448
4...........	34,4	71,4	335	443
5...........	39,2	68,4	410	453
6...........	43,0	65,8	env. 470	env. 450

Ici h et a sont la hauteur et l'azimut du point, mesurés en degrés, et H et D, qui sont donnés en kilomètres, sont l'altitude au-dessus de la surface de la Terre et la distance de Kristiania au point ayant le point d'aurore au zénith.

Ce qui est frappant ici c'est la grande altitude du pied du rayon ainsi que le fait que l'aurore atteint presque le niveau de 500^{km} au-dessus de la Terre. Ce dernier fait a déjà été constaté par nos mesures photogrammétriques pendant l'aurore du 22-23 mars 1920; en effet nous trouvâmes alors pour les sommets des rayons des altitudes entre 500^{km} et 600^{km} (1).

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur une méthode nouvelle de prévision des variations barométriques.* Note (2) de MM. E. **Delcambre** et **Ph. Schereschewsky**, présentée par M. R. Bourgeois.

La méthode que nous décrivons a pour but d'annoncer le sens et la valeur numérique des variations barométriques. Elle est valable dans des cas bien

(1) Voir *Geofysiske Publikationer*, vol. 2, n° 2. Kristiania, 1921, à l'imprimerie Gröndahl et fils.

(2) Séance du 20 juin 1921.

déterminés et extrêmement fréquents. Elle est fondée essentiellement sur l'examen d'une entité météorologique définie plus bas : *le noyau des variations barométriques* qu'elle substitue à l'ancienne notion de *dépression*. Elle remplace l'étude des cartes isobariques par celle des cartes différentielles où l'on porte les variations de la pression atmosphérique en chaque station au cours de divers intervalles de temps.

La méthode consiste à regarder les variations de pression de tous les points d'une carte météorologique comme étant dus au déplacement ou, d'une manière plus générale, à l'évolution des noyaux de variations barométriques.

1° *Définition et existence des noyaux de variations.* — Notons sur une carte la valeur des variations de la pression atmosphérique observées dans chaque station depuis un certain nombre d'heures, 12 par exemple, et traçons les courbes d'égale variation ou *isallobares*. On remarque que ces courbes tracent des figures d'allure topographique qui ressemblent dans une certaine mesure aux dépressions et aux anticyclones des cartes d'isobares.

Les ensembles de courbes affectent des formes généralement elliptiques et bien centrées autour des points où la pression a subi les plus grandes variations positives ou négatives. Ce sont ces groupes elliptiques que nous nommons *noyaux de variations*. Comme les dépressions et les anticyclones ils conservent une individualité bien marquée sur les cartes successives. La considération de tels systèmes de courbes n'est pas absolument nouvelle; les cartes d'isobares du *Bulletin météorologique international français* contenaient, depuis fort longtemps, en pointillé, le tracé sommaire des isallobares correspondant à un intervalle de 24 heures, mais elles se proposaient uniquement de rendre ainsi plus clairement compte des variations passées, sans en faire un instrument de prévision; d'autre part, M. Nils Eckholm en Suède a envisagé, dès avant 1914, les isallobares correspondant à un intervalle de 12 heures et a étudié leurs déplacements. Enfin le Bureau météorologique militaire a été conduit pendant la guerre à tracer des cartes de tendances, c'est-à-dire des cartes d'isallobares correspondant à un intervalle de 3 heures seulement.

Notre méthode systématise l'étude des noyaux de variations et emploie surtout des isallobares à 12^h et à 3^h. Elle se distingue, notamment, par le fait qu'elle exige que le tracé des isallobares soit fait au moyen d'un grand nombre de stations, deux ou trois fois plus nombreuses que dans les méthodes précédemment employées. Il ne s'agit pas là seulement d'une complication d'importance secondaire, mais au contraire d'une question de principe :

c'est en effet par l'examen minutieux de certains détails des cartes différentielles que la méthode se propose d'indiquer le sens et la grandeur numérique des variations barométriques.

2° *Propriétés des noyaux de variations. Différents types d'évolution.* — Les noyaux de variations barométriques peuvent évoluer de diverses manières :

a. Ils sont animés souvent d'un mouvement général de translation, parallèle au petit axe des ellipses. Cette translation peut être uniforme et n'être accompagnée d'aucune évolution importante de la profondeur du noyau. Il est alors beaucoup plus régulier que les mouvements analogues des dépressions. Ce type, particulièrement simple d'évolution, avait déjà été signalé par M. Nils Eckholm; mais il est loin d'être le seul, et les autres se prêtent comme lui à la prévision qualitative et quantitative des variations barométriques.

b. Le mouvement de translation peut être uniforme et accompagné d'une décroissance ou d'un accroissement de la profondeur du noyau.

c. Il peut être uniforme et accompagné d'une dislocation du noyau qui se décompose alors en deux éléments marchant dans des directions différentes, parfois presque rectangulaires.

Dans tous les cas précédents, les vitesses de translation sont comprises entre 35^{km} et 70^{km} à l'heure.

Enfin les noyaux peuvent évoluer sur place en se créant ou en disparaissant progressivement. Un même noyau de variations peut d'ailleurs successivement évoluer suivant les différents types que nous venons de décrire.

D'une manière générale, les mouvements nets de translation obéissent à la loi suivante : *Les noyaux de variations se déplacent en laissant les anticyclones, centres d'action élevés, à leur droite.*

3° *Méthode de prévision.* — Les observations précédentes ne sauraient avoir de valeur pratique, en dehors de leur intérêt purement descriptif, que s'il est possible dans chaque cas de reconnaître quel va être le type d'évolution de chacun des noyaux qui figurent sur les cartes. A cet effet, on compare les cartes de noyaux de variations à 12^h, et les cartes de noyaux de tendances tracées à un même instant. Ce sont la position, la valeur et la forme relatives des noyaux de tendances et des noyaux de variations qui indiquent le genre d'évolution. Quant à la vitesse de translation des noyaux, elle est donnée, lorsqu'il y en a une, par l'examen des positions successives d'un même noyau à quelques heures d'intervalle, par exemple 6 heures.

La prévision consiste alors à désigner la position future des noyaux de variations ainsi que leur valeur et leur forme. Ceci étant fait, on peut en déduire quelle sera, en chaque station, l'amplitude des variations barométriques et, par conséquent, le tracé futur des isobares et de la direction des vents. L'intervalle de temps auquel s'applique cette méthode est de 12 heures; dans certains cas, il peut s'élever jusqu'à 24 heures.

Au point de vue général de la Météorologie dynamique, l'existence de ces mouvements qui transportent les noyaux de variations semble prouver l'existence dans l'atmosphère de grands courants de direction plus régulière que les courants de surface, de vitesse parfois considérable et qui conservent, au cours d'une même journée et même parfois pendant plusieurs jours, des caractères fort constants.

Ajoutons que, comme un grand nombre de noyaux de variations proviennent de l'océan Atlantique, il devient indispensable de recueillir les observations des navires en mer.

BOTANIQUE. — *Sur les microsomes et les formations lipoïdes de la cellule végétale.* Note [1] de M. A. GUILLIERMOND, présentée par M. Gaston Bonnier.

Sous le nom de *microsomes*, Dangeard a décrit de petits grains très réfringents dont il fait un système spécial, le *sphérome*. Comme ces grains ont été confondus avec des mitochondries, il nous a paru nécessaire d'étudier leurs caractères évolutifs et microchimiques encore peu connus.

A. Sur le vivant, il est très facile de distinguer les microsomes des mitochondries, grâce à leur réfringence beaucoup plus accusée et à leurs déplacements plus rapides, ainsi que par leurs dimensions et leur nombre beaucoup plus variables. Dans la plupart des cellules, les microsomes sont nettement plus petits que les mitochondries granuleuses; dans d'autres cas, ils peuvent offrir des dimensions variables : les plus petits ont toujours un volume supérieur à celui des mitochondries et les autres sont plus gros que ces dernières. Enfin, leur nombre varie infiniment et dépend de l'état de développement des cellules. En général, très nombreux dans les très jeunes, ils deviennent rares dans les tissus adultes. Souvent cependant, ils sont capables de réapparaître en grande abondance dans les tissus adultes; en quelques cas, ils restent très abondants pendant toute la durée de la vie des cellules. Les microsomes ne semblent pas être des éléments permanents du cytoplasme, ce sont des granulations

---

[1] Séance du 13 juin 1921.

qui peuvent apparaître et disparaître selon les circonstances, mais leur présence est excessivement fréquente et il est rare qu'une cellule n'en renferme pas au moins quelques-uns.

Par leur évolution, les microsomes se comportent donc comme de simples produits du métabolisme cellulaire.

B. Les microsomes ne présentent pas de biréfringence. Ils ne prennent pas le bleu du Nil, ni aucun autre colorant vital. Dans une solution d'acide osmique, ils brunissent toujours nettement, quoique rarement d'une manière intense. Sur coupes à congélation ou sur fragments détachés d'épidermes fixés par le formol, les microsomes se colorent par le soudan III et le scarlach. La méthode de Fichler, qui permet de mettre en évidence les acides gras, révèle parfois la présence d'acides gras dans les cellules végétales. Dans une coupe à congélation d'un bourgeon d'*Iris germanica*, traitée par cette méthode, on aperçoit, par le simple examen microscopique, une coloration nette, presque exclusivement localisée dans le méristème, qui paraît indiquer la présence, dans cette région, d'acides gras. L'observation microscopique de la coupe montre que ces acides n'ont aucun rapport topographique avec les microsomes; ils apparaissent à l'état diffus dans le cytoplasme et parfois dans les plastides. La méthode préconisée par Dietrich pour la détection des lipoïdes montre également la présence de ces substances dans les cellules végétales. Dans une coupe de bourgeon d'*Iris germanica*, les lipoïdes présentent microscopiquement la même localisation que les acides gras, mais à l'examen microscopique, il est facile de constater qu'ils correspondent aux microsomes, ainsi qu'aux granulations d'aspect graisseux, que contiennent les jeunes plastides. Les microsomes paraissent en grande partie insolubilisés après fixation par la méthode de Regaud, car même sur coupes à la paraffine traitées par cette technique, ils peuvent être mis en évidence par le soudan et le scarlach (méthode de Ciaccio).

Les microsomes présentent donc tous les caractères microchimiques des lipoïdes (coloration par les méthodes de Dietrich et de Ciaccio) et il semble qu'on puisse les considérer comme tels. Il ne paraît pas cependant que les microsomes aient partout la même constitution. C'est ainsi que dans l'épiderme des pétales de la plupart des variétés de Tulipe, on trouve dans chaque cellule un ou deux énormes globules, d'aspect graisseux, qui paraissent résulter de la fusion des microsomes; dans d'autres, on observe des microsomes de toutes les dimensions, depuis de très petits grains jusqu'à de très gros globules. Or, à mesure que les microsomes grossissent, ils réduisent beaucoup plus l'acide osmique, jusqu'à prendre une teinte noire. En traitant la préparation fixée par l'acide osmique, par le soudan ou par le scarlach, on constate que les petits microsomes faiblement brunis prennent le colorant, tandis que les gros conservent leur teinte brun foncé, due à l'acide osmique. Les plus gros globules sont aussi moins résistants à l'alcool après fixation par la méthode de Regaud et se dissolvent partiellement, laissant à leur place une vacuole renfermant sur l'un de ses pôles un résidu en forme de calotte qui continue à brunir par l'acide osmique et à se colorer par le soudan et le scarlach. Cependant la méthode de Dietrich les colore comme les petits. Ils renferment donc également des lipoïdes, mais joints à des graisses neutres.

C. Examinons maintenant comment se comportent les microsomes par les techniques

mitochondriales. Dans les préparations fixées par la méthode de Meves et colorées par les méthodes de Benda, de Kull ou par l'hématoxyline ferrique, les microsomes se comportent d'une manière très variable : souvent ils apparaissent fortement brunis par l'acide osmique et se distinguent facilement des mitochondries. Cependant souvent aussi, le brunissement s'atténue dans le baume, de telle sorte que les microsomes n'apparaissent pas. Il semble que parfois, mais rarement, les microsomes, surtout les plus petits, quand ils sont faiblement brunis, soient capables de se colorer par l'hématoxyline et surtout par la fuchsine acide, mais en ce cas, ils ne sont pas difficiles à distinguer des mitochondries par leurs plus petites dimensions et leur coloration plus faible. Par contre, après fixation par la méthode de Regaud, les microsomes ne se colorent jamais, ni par l'hématoxyline ferrique, ni par la fuchsine acide. On peut les mettre en évidence, en traitant la préparation colorée par l'hématoxyline par le *soudan* ou le *scarlach*. Ainsi il est bien établi que les microsomes ne se colorent pas électivement par les techniques mitochondriales et ne peuvent être en aucun cas confondus avec les mitochondries.

D. Nos recherches antérieures ont montré que les chondriocontes en voie d'évoluer en amyloplastes ou en chromo ou en chloroplastes dans les cellules de jeune tissus d'*Iris germanica* se remplissent de nombreuses petites gouttelettes d'aspect graisseux qui ensuite se résorbent partiellement ou totalement à la fin de l'élaboration de l'amidon et des pigments. Ces gouttelettes offrent les mêmes caractères microchimiques que les microsomes. On pourrait donc se demander si les microsomes ne sont pas élaborés par les éléments du chondriome. La présence de nombreux microsomes dans les Champignons et dans certains Phanérogames qui ne montrent jamais de granulations lipoïdes dans les éléments de leur chondriome semble exclure cette hypothèse.

E. De l'ensemble de ces faits, il résulte que les microsomes sont de simples produits de métabolisme cellulaire. Ils semblent constitués le plus souvent par des lipoïdes, parfois joints à des graisses neutres. Les termes de microsomes et de sphérome sont donc impropres et doivent être remplacés par celui de granulations lipoïdes.

PHYSIOLOGIE GÉNÉRALE. — *Sur le mode d'action des présures végétales.* Note de MM. **E. Couvreur** et **P. Chosson**, présentée par M. Gaston Bonnier.

L'un d'entre nous a établi, il y a longtemps déjà, que la présure ordinaire (produit de la macération de la caillette du veau) n'exerce pas sur la matière caséinogène du lait une action *dédoublante* et que, quand on constate après coagulation du lait par cette présure des protéoses dans le petit lait, ces dernières sont le résultat d'une *intervention surajoutée* (microbes) [1].

---

[1] *Action du lab dans la caséification* (*Comptes rendus de la Société de Biologie*, 1910-1911).

Il était intéressant de savoir si d'autres présures, animales ou végétales, se comporteraient de la même manière. A cet effet, nous avons institué tout d'abord un certain nombre de recherches sur des présures d'Invertébrés (Crustacés, Mollusques, Annélides). Laissant de côté, pour le moment, ce que nous a révélé cette étude, nous exposerons seulement dans cette Note ce qui a trait aux végétaux.

On sait depuis longtemps que certaines plantes ou parties de plantes broyées donnent un suc susceptible de faire coaguler le lait. Gerber a fait de nombreux travaux sur cette question et on lui doit un moyen pratique de préparer, d'isoler et de conserver les présures végétales [1].

C'est ce moyen que nous avons employé pour préparer les présures contenues dans les racines du *Solanum Dulcamara*, dans les tiges et feuilles de l'*Helleborus fœtidus*.

Ces présures, fort actives, ont provoqué à l'étuve à 35° très rapidement la coagulation du lait, résultat d'ailleurs attendu, simple vérification de constatations anciennes. Ce qu'il nous importait de savoir, c'était le processus intime de cette coagulation. Or, en opérant avec les précautions indiquées par l'un de nous dans les Notes que nous avons rappelées, nous n'avons jamais pu déceler la présence de protéoses dans le petit lait.

Nous devons donc conclure que les présures végétales (au moins celles du *Solanum Dulcamara* et de l'*Helleborus fœtidus*) se comportent comme le lab des Mammifères et que, là non plus, le passage du caséinogène de l'état soluble à l'état insoluble ne s'accompagne du dédoublement de cette substance.

Il serait intéressant de savoir si les sucs présurants de certains végétaux ne sont pas également protéolytiques. Nous étudions actuellement cette question.

PHYSIOLOGIE. — *Le radiopuncture microscopique des cellules mobiles.* Note de M. SERGE TCHAHOTINE, présentée par M. ROUX.

J'ai décrit [2] il y a quelque temps la méthode de radiopuncture microscopique, qui permet d'appliquer la microvivisection à des cellules isolées, telles que les œufs microscopiques, etc., en localisant un dard très fin de

---

[1] *Méthode générale de préparation des présures végétales* (*Comptes rendus de la Société de Biologie*, séance du 28 mai 1909).

[2] S. TCHAHOTINE, *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 1237.

rayons ultraviolets sur le noyau et sur d'autres organes ou sur des points choisis à l'intérieur et à la périphérie des cellules. J'ai communiqué [1] aussi les résultats des premières expériences faites avec cette méthode pour éclaircir certains problèmes de la cytologie expérimentale, devenues abordables.

Les expériences tentées se reportaient à des cellules immobiles, telles que les œufs d'oursins surtout. Mais une foule de problèmes importants se pressent aussi, qui ont trait à la vie des cellules isolées mobiles, telles que les êtres unicellulaires, les protozoaires, parmi lesquels ce sont surtout les infusoires, qui attirent notre attention en premier lieu. J'ai essayé donc actuellement de résoudre avant tout le problème technique de la radiopuncture microscopique, appliquée aux cellules mobiles, comme les infusoires. Deux tâches se sont présentées ici : 1° immobiliser ces êtres pour la durée de la piqûre; 2° avoir la certitude que la piqûre a atteint la cellule. Dans le cas des œufs d'oursins j'ai décrit [2] le phénomène indiquant que le but a été atteint : on voit au point radiopiqué apparaître aussitôt une petite échancrure ou une invagination.

Pour l'immobilisation des infusoires, j'ai eu recours à deux procédés : à la narcotisation et à la fixation mécanique.

La technique de la première je l'ai décrite ailleurs [3].

Pour la technique de la fixation mécanique des infusoires pendant la durée de l'irradiation localisée, je procède de la manière suivante :

Au moyen d'un tube capillaire en verre on pêche un infusoire de la culture et, en soufflant doucement, on expulse sur une lame le contenu formant plusieurs gouttes minimes, dans une desquelles se trouve l'infusoire.

On l'aspire ensuite avec un tube capillaire très fin et l'on place cette goutte sur une lamelle, sur laquelle on a tracé avec un diamant deux cercles : un plus grand au milieu et un autre plus petit à côté. La goutte est déposée au milieu du premier, mais du côté opposé de la lamelle. Entre les deux cercles, mais sur la face opposée de la lamelle, on trace avec le diamant une petite ligne. Dans le petit cercle on place une autre petite goutte, contenant une solution de fluorescéine. Ensuite avec un tube capillaire encore plus fin on aspire doucement l'eau de la première goutte, en y laissant l'infusoire dans très peu de liquide; la couche mince d'eau l'aplatit. On renverse alors

---

(1) S. Tchahotine, *C. R. Soc. Biol.*, t. 83, 1920, p. 1593; t. 84, 1921, p. 464.

(2) S. Tchahotine, *C. R. Soc. Biol.*, t. 84, 1921, p. 464.

(3) S. Tchahotine, *C. R. Soc. Biol.*, t. 84, 1921.

la lamelle et on la place vite avec les deux gouttes en dessous sur les bords d'une petite chambre humide, dont le fond est constitué par une lame en quartz. Cette chambre est munie sur le côté d'un tube capillaire, par lequel le liquide peut s'évaporer peu à peu. Tout le reste est clos au moyen d'huile ou de vaseline.

Les manipulations à suivre sont alors les suivantes :

1° On met au point, avant tout, le grand cercle, tracé sur le verre, et l'on cherche le point où les deux cercles se touchent;

2° On abaisse le tube jusqu'à voir la ligne, tracée au-dessous;

3° Par des mouvements de la platine à chariot on trouve l'infusoire, on le met bien au point et l'on note la position du vernier pour le repérage ultérieur;

4° On recule jusqu'à avoir au milieu la goutte avec la fluorescéine;

5° On obscurcit le champ, en mettant un écran devant la lampe;

6° On met au point le dard ultraviolet et en contact de celui-ci l'aiguille de l'oculaire à indice;

7° On éclaire de nouveau le champ et, en manœuvrant la platine à chariot, on repère le point où se trouve l'infusoire.

Les mouvements de ce dernier deviennent de plus en plus difficiles et lents, le liquide s'évapore peu à peu, on attend encore et au moment où les mouvements sont plus ou moins arrêtés (il n'y a que le battement des cils et la vacuole contractile qui continuent à donner des signes de vie), on obture l'orifice du capillaire avec de la paraffine fondue. L'évaporation est aussitôt arrêtée, on passe le point à piquer sous la pointe de l'aiguille indicatrice et l'on radiopique. Ceci fait, on enlève doucement la paraffine et l'on aspire par le capillaire une goutte d'eau, on soulève doucement la lamelle et l'on ajoute vite une goutte d'eau à l'infusoire opéré.

Comme critère de l'efficacité de la radiopuncture dans le cas des infusoires, je me sers d'une réaction caractéristique : en radiopiquant fortement un infusoire, par exemple un Colpidium, à sa périphérie, on voit apparaître très vite une contraction de tout le corps, à l'exception du point piqué; ici il se forme une protubérance, qui ne tarde pas à éclater, à crever, sous la pression exercée par la contraction de tout le corps sur l'intérieur; aussitôt le cytoplasme sort par la blessure et de même le noyau, qui est presque projeté au dehors et reste gisant parfaitement isolé des restes du corps et des débris du cytoplasme expulsé, ayant son micronucleus à côté. Par cette méthode, on peut tirer le noyau au dehors, pour l'avoir autant que possible libéré du cytoplasme, qui l'environne dans la cellule.

PHYSIOLOGIE. — *Sur le mécanisme physiologique de la résistance du Lapin à l'avitaminose.* Note de MM. J. **Lopez-Lomba** et **Paul Portier**, présentée par le Prince de Monaco.

Dans un travail antérieur, l'un de nous, en collaboration avec Mme Randoin, avait signalé le fait que les lapins adultes nourris avec un mélange de légumes stérilisés à haute température ne succombaient pas si l'on incorporait à leur nourriture des déjections qui pouvaient d'ailleurs provenir de l'animal lui-même. Nous en avions tiré la conclusion qu'il pouvait y avoir, dans ces conditions, création de vitamines dans l'intestin du Lapin.

Nous avons, depuis lors, fait, sur cette même espèce animale, un grand nombre d'expériences dans le but d'élucider le mécanisme de cette résistance anormale à l'avitaminose.

Nos nouvelles recherches nous ayant montré qu'il fallait tenir le plus grand compte de l'âge des animaux d'expérience, nous présenterons nos résultats en les classant d'après ce facteur.

1° *Jeunes Lapins pesant moins de* 1kg. — Les très jeunes Lapins encore à la mamelle, nourris avec du lait stérilisé à haute température, meurent en quelques jours.

Les Lapins déjà sevrés, mais pesant moins de 1kg, nourris avec un mélange de légumes (carottes, choux, son), stérilisés entre 125°-130°, meurent avec les symptômes et les lésions caractéristiques de l'avitaminose.

La durée de la survie dépend du développement de l'animal au début de l'expérience. Les Lapins de 500g ont survécu environ 15 jours; ceux de 700g, 30 jours, et ceux de 850g, 2 mois.

Les jeunes Lapins nourris à la viande de cheval stérilisée (1 expérience), au riz décortiqué stérilisé et même au riz décortiqué cuit, succombent rapidement (10 jours environ). En somme, nous retrouvons pour les jeunes Lapins les résultats classiques.

2° *Lapins pesant plus de* 1kg. — C'est à partir de ce poids que le Lapin privé de vitamines paraît se différencier des autres animaux de laboratoire.

Nous avons, en effet, vérifié à nouveau que les Lapins de 1kg et au-dessus résistaient à un régime de légumes stérilisés à haute température non seulement lorsqu'on ajoute à cette nourriture des déjections, mais aussi lorsqu'on prend toutes les précautions pour éliminer autant que possible la coprophagie (animal maintenu sur un grillage à larges mailles qui se laisse traverser par les déjections).

3° *Mécanisme de la résistance à l'avitaminose.* — C'est là le point le plus important à élucider, celui sur lequel ont porté nos principaux efforts.

Et d'abord la coprophagie spontanée, fréquente chez les rats soumis aux expériences d'avitaminose, ne les préserve pas des accidents et de la mort:

tout au plus peut-elle la retarder. Le Lapin présente donc vraiment une résistance anormale. Il nous a semblé qu'on pouvait tenter de l'expliquer par une particularité physiologique très frappante signalée par Masson et Regaud.

Ces expérimentateurs ont montré en effet que le tissu lymphoïde de l'intestin, et en particulier celui de l'appendice, est normalement le siège d'une culture abondante de bactéries de provenance intestinale.

Ces bactéries, phagocytées en masse dans le tissu lymphoïde, constitueraient pour l'animal une source abondante de vitamines; elles pourraient remplacer celles qui font défaut dans la nourriture.

Cette interprétation concorde d'ailleurs avec une série de faits analogues que nous avons relevés chez de nombreux Invertébrés.

En effet, beaucoup d'Insectes, des Vers, des Mollusques, qui se sont adaptés dans la nature à une nourriture atypique, hébergent constamment dans leurs tissus des micro-organismes, variables d'un type à l'autre, qui semblent bien remplacer les vitamines absentes dans les aliments.

Cependant, ces conceptions tirées de la Physiologie comparée, si séduisantes qu'elles paraissent, doivent, toutes les fois que cela est possible, être soumises à une vérification expérimentale. Celle-ci est pratiquement très limitée lorsqu'on s'adresse aux Invertébrés, c'est pourquoi le Lapin est précieux dans la circonstance.

L'expérience consistera à s'efforcer d'éliminer les micro-organismes du tissu lymphoïde et à voir si la faculté normale de résistance à l'avitaminose disparaît en même temps.

Pour cela, nous avons fait l'ablation de l'appendice à 13 Lapins d'âges très différents supprimant ainsi la principale des masses lymphoïdes. Nous avons ensuite additionné la nourriture stérilisée d'acides organiques (tartrique, lactique, oxalique). Nous espérions, par ce moyen, créer dans l'intestin un milieu défavorable à la culture des micro-organismes dans les amas lymphoïdes persistant le long du tube digestif.

Ces tentatives se montrèrent inefficaces; l'examen histologique des masses lymphoïdes du Lapin soumis à ce régime révélèrent de nombreuses bactéries, et les animaux continuèrent à résister à ce régime privé de vitamines.

Supposant que la neutralisation des acides organiques était due, en grande partie, à la présence du suc pancréatique, nous avons réséqué le canal de Wirsung à un de nos Lapins déjà privé d'appendice.

Sept jours après l'opération, l'animal présentait des symptômes graves

d'avitaminose et mourait au bout de 12 jours. Cette expérience unique sera reprise sous peu.

En résumé, les Lapins adultes résistent indéfiniment à une nourriture stérilisée à haute température; il semble que ce soient les bactéries qui se développent normalement dans le tissu lymphoïde qui fournissent les vitamines que la nourriture n'a pas apportées. Chez le jeune Lapin en période de croissance, cette source de vitamines est insuffisante, et l'animal succombe d'autant plus rapidement qu'il est jeune.

Cependant de nouvelles expériences sont nécessaires pour fournir une preuve définitive du bien-fondé de cette interprétation.

CYTOLOGIE. — *Le mécanisme de la métaphase et de l'anaphase somatiques et ses conséquences chez* Corethra plumicornis. Note de M. **Armand Dehorne**, présentée par M. Henneguy.

Les particularités, signalées dans nos Notes précédentes sur *Corethra*, n'appartiennent pas qu'à cette espèce. Le travail de Metz [1] permet, en effet, d'affirmer qu'on les retrouvera dans la mitose de tous les Diptères. Chez *Culex pipiens*, cet auteur a décrit des chromosomes identiques à ceux de *Corethra;* mais il fournit de la métaphase et de l'anaphase une description très particulière.

Pour lui, les trois éléments de la fin de la prophase sont des paires de chromosomes homologues paternels et maternels. Au cours de la métaphase, les membres de chaque paire s'individualisent et se divisent pour leur compte; de sorte que la métaphase comporte la division longitudinale de six chromosomes disposés dans le plan équatorial. Puis, à l'anaphase, les trois paires se reconstitueraient de part et d'autre du plan de division. Cette description ne s'applique sûrement pas à *Corethra*, et nous la tenons pour inexacte. L'étude renouvelée de la mitose de grandes cellules de l'épiderme abdominal dans des larves montées *in toto* nous permet d'être catégorique.

La métaphase et l'anaphase somatiques se font exactement comme celles de la première mitose maturative de beaucoup d'animaux (Salamandre, Tomoptère). Les trois chromosomes se présentent comme des dyades à éléments plus ou moins éloignés; ceux-ci se rapprochent ensuite étroite-

---

[1] Ch.-W. Metz, *Chromosomes Studies on the Diptera*, II (*The Journal of Exp. Zoology*, vol. 21, n° 2, 1916).

ment et ils se trouvent en superposition dans la plaque équatoriale. Le premier effort d'écartement dicentrique se traduit par la transformation des trois chromosomes en des sortes de losanges ailés; puis, ces derniers, par agrandissement de l'ouverture losangique, deviennent des anneaux étirés constitués par les moitiés en fer à cheval complètement opposées. L'existence de ces anneaux est éphémère, on les rencontre rarement dans les préparations.

Lorsque les trois anneaux sont complètement développés, nous sommes déjà à l'anaphase. Alors, les anses en fer à cheval, ou moitiés primaires, qui les constituent ne montrent pas encore de clivage longitudinal. Puis, la séparation définitive de ces anses et leur montée vers les pôles commence, et c'est seulement au cours de cette montée qu'elles se clivent et forment chacune un groupe de deux moitiés secondaires bien détaché. En somme, la fragmentation longitudinale des moitiés primaires est un phénomène purement anaphasique et même tardif. Comme on voit, la mitose somatique opère sur trois, et non sur six chromosomes.

Il y a donc répartition, d'un côté et de l'autre du plan équatorial, de moitiés primaires *entières*. Si le clivage longitudinal de celles-ci se produisait, au contraire, dès la métaphase, au sein même de la plaque équatoriale, on pourrait invoquer des mouvements des moitiés secondaires tels que la mitose se ferait en définitive sur six anses. Mais la constitution d'anneaux comme celui de notre préparation enlève toute possibilité à une pareille interprétation.

Le fait que la fin de la métaphase somatique porte sur trois chromosomes seulement est d'une grosse importance. Les dyades prophasiques ne sont donc pas trois paires de chromosomes homologues. Nier, ou affirmer, à la suite de l'observation directe, la permanence des chromosomes est également vain; car ce procédé est impuissant à fournir une démonstration véritable. Mais des voies détournées conduiront peut-être à une certitude plus scientifique. Ainsi, chez *Corethra*, l'observation directe des noyaux quiescents est favorable à la notion de permanence. Cependant on arrive à une conclusion opposée lorsqu'on envisage l'histoire des chromosomes à partir de la fécondation. En effet, les spermatides renfermant trois anses simples, il est logique de croire que le noyau de fécondation initial contient six chromosomes simples. Mais, cette donnée étant admise, comme d'autre part la mitose somatique opère sur trois chromosomes seulement de la façon que nous avons indiquée, on est forcé de conclure que les chromosomes paternels et maternels ne se sont pas conservés tels qu'ils se trouvaient

dans les pronucléi. Ils ont dû se fusionner, et les trois chromosomes sont alors formés d'une substance mixte, à la fois paternelle et maternelle. Autrement dit, l'individualité des chromosomes ne serait pas permanente et les mitoses de maturation n'auraient aucun caractère qualitatif.

Une autre preuve que les dyades de la fin de la prophase sont bien trois chromosomes seulement, c'est qu'à la fin de l'état quiescent les trois spirèmes grêles dont elles dérivent se forment aux dépens de bandes alvéolisées analogues à celles que décrivent Grégoire et ses élèves chez les plantes; ces auteurs n'admettent pas, en effet, que les bandes quiescentes soient doubles dans la mitose somatique.

Quant à la perte de l'individualité des chromosomes, elle a lieu en réalité à chaque mitose à la fin de la télophase. En effet il n'est pas douteux que, après l'anaphase, les moitiés secondaires sont nettement individualisées et forment des anses achevées (consulter les belles figures de Metz). Cependant, après s'être rapprochées, un peu plus tard, deux à deux, elles s'unissent et donnent naissance à une seule bande alvéolisée. Et de cette bande persistant à l'état quiescent sortira, au début de la prophase suivante, un filament grêle, indivis, en zigzag. Ce processus est même très curieux, puisqu'il nous montre en somme que, chez les Diptères, le nombre haploïde se trouve obtenu après chaque télophase somatique par la constitution d'une bande quiescente aux dépens de deux éléments chromosomiques. Mais cela montre aussi la disparition des chromosomes en tant qu'unités morphologiques. Il y a conservation des bandes à travers la période quiescente; mais la constitution de bandes entraîne la perte de l'individualité des anses. Aussi convient-il de dissocier ici les deux notions: conservation des bandes et conservation de l'individualité des anses.

De tout ce qui précède, il suit que le schéma hétéro-homéotypique ne convient pas à *Corethra*, ayant été édifié à une époque où l'on croyait que la première mitose maturative ne ressemblait, dans aucun cas, aux mitoses somatiques qui la précèdent. Or, notre étude prouve que cette mitose I est à tout le moins homéotypique, et peut même être considérée comme la dernière des mitoses somatiques. Le qualificatif de hétérotypique devenant libre, on pourrait le donner à la deuxième mitose. Mais les deux dénominations de Flemming nous paraissent fortement usées par l'emploi qu'on en a fait depuis cet auteur. D'autre part, chez *Corethra*, la mitose II, ne pouvant être interprétée, non plus, comme amenant la disjonction de chromosomes homologues, n'est pas chargée du rôle qu'on attribue à la mitose I dans le schéma hétéro-homéotypique. Pour nous, elle est caractérisée par son

anaphase à anses simples, c'est-à-dire à substance réduite, la réduction chez *Corethra* n'étant guère qu'une question de *masse*. Appelons-la mitose haploïdique. Nous arrivons ainsi à formuler pour les Diptères, groupe auquel appartient le genre *Drosophila*, un schéma somatico-haploïdique qui répond aux seuls résultats de l'analyse microscopique et n'implique aucune hypothèse téléologique.

BIOLOGIE. — *Greffes d'œufs de Tritons dans la cavité péritonéale de Salamandres.* Note de M. **A. Weber**, présentée par M. Henneguy.

Les premiers résultats que j'ai obtenus en introduisant des œufs de Tritons (*T. cristatus* et *T. alpestris*) dans la cavité péritonéale d'Urodèles adultes (*T. cristatus*, *T. alpestris* et *Spelerpes fucus*) semblent pouvoir s'interpréter en admettant dans le milieu intérieur de ces animaux une substance qui tue les œufs et qui, lorsqu'elle est atténuée, retarde seulement leur développement [1]. L'action nocive se produit aussi bien sur des œufs fécondés non encore segmentés que sur des œufs déjà avancés en segmentation, ou même sur des larves.

La manière dont se comporte le milieu intérieur des hôtes adultes et surtout de *Triton cristatus*, vis-à-vis de ces larves ou bien vis-à-vis d'œufs arrivés au stade de blastula ou de gastrula, peut être comparée à ce qu'ont observé récemment A. Drzewina et G. Bohn [2], qui font agir sur de jeunes larves de Grenouille des solutions faibles de métaux colloïdaux : les blastomères superficiels ou les cellules épidermiques sont rapidement tués et se détachent de la surface du germe.

La première hypothèse qui vient à l'esprit au sujet de l'existence, dans le milieu des Urodèles adultes, d'une substance nocive pour les œufs ou les larves, est sans doute insuffisante ou inexacte. Les phénomènes que j'ai observés sont peut-être d'essence plus physique que chimique; mais dans l'état actuel de mes recherches l'idée de substance agissant comme un toxique traduit plus facilement leurs résultats.

---

(1) Voir *Comptes rendus de la Société de Biologie*, t. 83, 1920, et t. 84, 1921; *Comptes rendus*, t. 172, 1921, et *Comptes rendus de l'Association des Anatomistes*, Paris, 1921.

(2) A. Drzewina et G. Bohn, *Variations dans le temps de la résistance aux agents physiques et chimiques chez* Rana fusca (*Comptes rendus de la Société de Biologie*, t. 84, 28 mai 1921).

Cherchant à vérifier si cette substance existe chez tous les Urodèles et quelles peuvent être les modalités de son action, j'ai introduit dans la cavité péritonéale de Salamandres noires (*Salamandra atra*) récemment capturées des œufs déjà segmentés de *Triton alpestris*. Dans l'ensemble, les résultats obtenus sont les mêmes, que la greffe soit faite sur des Salamandres mâles ou sur des femelles; les phénomènes sont seulement un peu plus rapides dans le péritoine des mâles.

Suivant le temps passé au contact du milieu intérieur de ces Urodèles adultes, le développement de l'œuf de Triton est ralenti ou arrêté. Au bout de 1 heure et demie de séjour chez les Salamandres mâles, après 2 heures et demie chez les Salamandres femelles, les processus de segmentation de l'œuf de Triton sont inhibés.

Les germes ainsi obtenus sont d'aspect parfaitement normal; ils n'ont pas ce dépoli léger de la surface qui traduit l'action toxique du milieu intérieur dans les greffes sur d'autres Urodèles. Du reste, l'œuf de Triton inoculé dans la cavité péritonéale de la Salamandre n'est pas tué; il traverse une période de vie latente et, après cette inhibition passagère, il reprend le cours de son développement.

Les blastomères de germes de *Triton alpestris* ayant séjourné 16 heures dans la cavité péritonéale de Salamandres noires recommencent à se segmenter au bout de 40 heures si la greffe a été faite sur une Salamandre femelle, après 60 heures si l'inoculation a été pratiquée sur un mâle.

Je serais tenté de supposer que le milieu interne des Salamandres noires renferme une substance agissant comme un narcotique sur les œufs du Triton alpestre et que cette substance est capable d'être éliminée peu à peu. Le développement reprend ensuite, mais pas immédiatement normal; en effet, il semble que les blastomères sortent d'autant plus vite de leur léthargie qu'ils contiennent moins de vitellus. J'ai obtenu ainsi des larves dans lesquelles il y avait des modifications de formes dues à ce manque d'ensemble dans l'évolution des blastomères. Mais progressivement, tout rentre dans l'ordre et, malgré une assez forte mortalité portant principalement sur les œufs greffés dans le péritoine de Salamandres mâles, on observe finalement des larves de Triton incurvées en forme de croissant à concavité ventrale et qui nagent en tourbillonnant, puis des têtards d'apparence complètement normale.

BIOLOGIE. — *Le cycle évolutif de* Dunaliella salina.
Note de M. **Alphonse Labbé**, présentée par M. Henneguy.

En suivant jour par jour, corrélativement, dans les salines du Croisic et dans les cultures expérimentales par passage de l'eau douce à l'eau sursalée et réciproquement, les diverses formes de *Dunaliella salina* Dunal, j'ai pu établir le cycle évolutif de ce curieux Flagellé qui détermine la couleur rouge des marais salants.

Sans entrer dans les détails, voici brièvement comment je conçois ce cycle complexe :

Au début de l'hiver, quand la récolte du sel a été faite, il ne reste dans les salines que quelques individus :

Des zoospores rouges (*érythrospores*) colorées par l'hématochrome;

Des zoospores vertes à stigma rouge (*chlorospores*) de taille variable, mais toujours très petites.

Pendant l'hiver, l'apport d'eau douce (lavage des œillets, pluies) tend à établir un milieu de concentration saline faible, souvent presque nulle. Les érythrospores disparaissent presque toutes, sauf quelques-unes qui forment des kystes de repos (hypnocystes rouges, *érythrocystes*). Par contre, dans ce milieu dilué, les chlorospores se développent rapidement, se conjuguent, et forment de gros zygotes verts (*chlorocystes*), immobiles, qui se divisent d'autant plus activement que l'eau est plus diluée. D'où dominance des formes vertes, comme dans mes cultures expérimentales [1]. Vers mars-avril, les œillets, remplis d'eau de mer fraîche, sont au repos, et tout l'été la concentration saline se fait progressivement, en corrélation avec l'évaporation et la température.

C'est alors que l'on commence à observer chez certains individus l'apparition de l'hématochrome, suivant le mode que j'ai indiqué dans une Note précédente.

Peu à peu, les érythrospores provenant de chlorospores prolifèrent, et leur dominance est fonction de la concentration saline. Aussi, en juillet-août, les érythrospores et les érythrocystes dominent, bien qu'il reste toujours avec eux un assez grand nombre de très petites chlorospores. Il en va ainsi jusqu'au moment où les paludiers enlèvent le sel. Et le cycle recommence.

Il faut ici noter plusieurs points importants :

1° Les formes vertes, chlorophylliennes, coexistent toujours avec les formes rouges à hématochrome, même dans l'eau sursalée. C'est la forme normale de propagation, puisqu'elle s'adapte à tous les milieux. Très grandes

---

[1] Alphonse Labbé, *Sur les modifications adaptatives de* Dunaliella salina *Dunal* (*Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 1074).

Dans l'eau douce, il n'y a plus que des formes vertes.

dans l'eau douce, elles deviennent très petites dans l'eau sursalée, mais persistent.

2° La dominance de l'une ou l'autre des deux formes est fonction de la concentration saline, les formes rouges étant liées aux milieux de concentration élevée.

3° Si les chlorospores en milieu salé peuvent se transformer en érythrospores, la réversibilité n'est pas possible; la chlorophylle, une fois disparue, ne se régénère pas de l'hématochrome. Si donc les chlorospores sont la forme normale, les érythrospores ne sont qu'une forme adaptative, exceptionnelle, anormale, sans retour possible en arrière.

Ce cycle, avec des variantes et de curieuses formes intermédiaires, me paraît, dans ses grandes lignes, invariable, et il est peu probable que les *Dunaliella* des chotts algériens ou des étangs salés non exploités passent par des stades très différents.

Le déclanchement de la transformation des formes vertes en formes rouges est toujours le même : une plasmolyse partielle avec disparition de l'amidon, formation de glycogène, apparition de cet hématochrome, qui est probablement une anthocyanine; l'odeur de violette des *Dunaliella* que possède aussi l'*Hæmatococcus pluvialis* (des neiges rouges), les réactions phénoliques montrent une parenté avec les essences et les composés glucosidiques.

Quant à la cause du déclanchement, qui ne paraît pas en rapport avec la lumière, elle se trouve peut-être dans l'influence de l'amphimyxie, comme chez les *Volvox*, si voisins des *Dunaliella*, où l'œuf fécondé perd sa chlorophylle et se colore par un hématochrome. Mais il y a des causes physicochimiques plus nettes qui sont les conditions mêmes des salines : viscosité et forte teneur en sels; chaleur et lumière intensives à cause de la grande surface et du peu de profondeur; oxygénation faible. Le début de la transformation est, en tout cas, un changement d'état physique, dû à une turgescence d'ordre osmotique, c'est-à-dire un apport d'ions dans la cellule : d'où un changement dans l'état colloïdal; puis vient une question chimique, qui ne pourra être résolue que quand nous connaîtrons la nature de l'hématochrome.

En résumé : *l'organisme qui colore en rouge les marais salants et à qui nous pouvons conserver le nom de* Dunaliella salina *n'est que la phase ultime de l'évolution d'un flagellé chlorophyllien voisin des Volvocinées, très eurihyalin, qui en eau sursalée donne des formes sténohyalines non réversibles aux formes chlorophylliennes, et colorées par un hématochrome.*

BIOLOGIE. — *Conditions du développement de l'œuf durable chez les Phyllopodes.* Note de Mlle **Lucienne Dehorne**, présentée par M. L. Joubin.

Les Cladocères pondent comme on sait deux sortes d'œufs : les uns évoluent rapidement aussitôt après la ponte et se développent complètement sans fécondation, les autres ne pourraient, d'après Weismann, se développer sans avoir été fécondés. En outre, les œufs parthénogénétiques accomplissent leur entier développement dans une cavité de la carapace (chambre incubatrice) située dorsalement par rapport au corps de l'animal; l'œuf fécondé séjourne aussi quelque temps dans cette chambre, il y subit sans doute les premières phases de son développement; mais il y est étroitement enveloppé par une épaisse membrane provenant des parois de la chambre incubatrice (1) et l'œuf ainsi enveloppé est expulsé lors de la mue avec la carapace qui l'enserre (Lubbock, 1857). On sait que ces œufs conservent longtemps la possibilité de se développer.

Les ovogonies dont dérivent ces deux sortes d'œufs sont primitivement équivalentes et ne diffèrent entre elles que dans leur évolution; sous certaines influences dont je parlerai ultérieurement, quelques ovogonies se comportent en phagocytes, absorbent leurs voisines et se transforment en ovules qui ne pourraient évoluer sans l'intervention de l'élément mâle. Leur présence dans l'ovaire suffirait à provoquer la préparation de la sécrétion éphippiale dans la chambre incubatrice, si bien que ces ovules spéciaux sont toujours logés dans une éphippie (2).

Ainsi le développement de l'œuf éphippial serait, suivant les auteurs, étroitement conditionné par la nécessité de la fécondation; or, il résulte de mes recherches que cette condition n'est peut-être pas nécessaire et que néanmoins le développement de ces œufs est lié à des conditions telles que, malgré l'apparence, ce mode de reproduction est extrêmement précaire.

---

(1) La formation de cette enveloppe ne paraît pas avoir été exactement comprise par les différents auteurs. Il ne s'agit pas d'un épaississement partiel ou total de la carapace, mais d'une sécrétion qui remplit la cavité de la chambre incubatrice. En s'enfonçant dans le sein de cette sécrétion, les œufs durables se trouvent du même coup entourés par cette substance qui durcit et forme une membrane d'enveloppe, ephippium, exactement moulée sur les œufs.

(2) L'éphippie des Daphnies contient habituellement deux œufs durables, celle des *Moina* un seul œuf.

Si l'on abandonne, comme je l'ai fait, les éphippies sur le fond d'un bocal rempli d'eau, on constate que, quelle que soit la température, quelles que soient les qualités chimiques du milieu, aucune d'elles ne se développe: mais il suffit de les soumettre à une dessiccation prolongée, puis de les remettre dans l'eau pour les voir éclore.

Les œufs éphippiaux des Cladocères rentrent donc dans la catégorie des œufs à coque dure des Apus et des Branchipes dont l'éclosion nécessite l'action préalable et prolongée de la sécheresse. Or Apus et Branchipes habitent des mares peu profondes, alimentées par les pluies du printemps et de l'automne, mais que les chaleurs de l'été assèchent; tel n'est pas généralement l'habitat des Cladocères qui vivent surtout dans des lacs et des étangs permanents. La plupart du temps les œufs durables des Cladocères ne trouvent donc pas les conditions nécessaires à leur développement. Toutefois, à supposer que les bords d'un étang viennent à se dessécher et que la vase contienne des éphippies, si, comme je l'ai maintes fois constaté, ces éphippies ont été formées en l'absence complète de mâles, aucune d'elles ne se développera du moment que la fécondation est vraiment nécessaire. La formation de ces œufs devient donc inutile. J'aurai du reste l'occasion de montrer que la reproduction des Cladocères est peut-être exclusivement parthénogénétique.

De même que les œufs éphippiaux des Cladocères, les œufs des Apus et Branchipus conservés dans l'eau ne peuvent se développer. Il s'ensuit que ces Phyllopodes ne se perpétueront pas dans des mares qui ne sont jamais à sec. Par contre, si le dessèchement persiste, la vase pulvérisée est dispersée par le vent, et avec elle les œufs durables; en outre l'expérience montre que la dessiccation subie par les œufs ne peut être quelconque, car des œufs d'Apus, des œufs de Branchipus, des éphippies de Cladocères maintenus dans une atmosphère dépourvue de toute humidité deviennent stériles au bout de quelque temps. Des œufs de ces Phyllopodes conservés à sec dans mon laboratoire durant les mois d'été et à l'abri de toute influence humide n'ont pu se développer; inversement des œufs provenant de mêmes cultures, conservés à sec pendant les mêmes mois, mais dans un aquarium ouvert, situé au voisinage d'une eau courante, se sont parfaitement développés une fois mis dans l'eau; à une température moyenne de 16° C. des nauplius de Branchipes nageaient déjà le cinquième jour, de jeunes *Daphnia longispina* le sixième jour. J. Jézéquel laisse les petits aquariums, dans lesquels il élève depuis 17 ans divers Phyllopodes, dans une galerie spéciale où des courants d'eau alimentent des bacs d'élevage. Cette galerie est largement exposée

aux rayons du Soleil et l'eau des bacs non alimentés s'épuise d'elle-même. Les aquariums restent à sec durant quelques mois; dans ces conditions, les œufs de ces Crustacés y conservent toute leur vitalité et sont susceptibles d'éclore à n'importe quel mois de l'automne ou de l'hiver qui suit l'époque de leur ponte; même, suivant Jézéquel, des œufs maintenus ainsi durant trois ans ont pu cependant éclore.

Pour résumer, les œufs à éphippie des Cladocères sont inutiles puisque la reproduction parthénogénétique suffit à conserver l'espèce et que d'ailleurs les conditions exigées pour le développement de l'œuf éphippial sont très rarement réalisées.

Au contraire, si l'unique mode de reproduction des autres Phyllopodes est constitué par les œufs durables, c'est un mode fâcheux, même nuisible; on admet généralement en effet que la résistance des œufs à la dessiccation est une propriété remarquable parce que l'espèce qui les forme vit dans des eaux douces sujettes à s'épuiser rapidement; en réalité leur développement exige des conditions telles qu'il supprime le plus grand nombre des chances de survie.

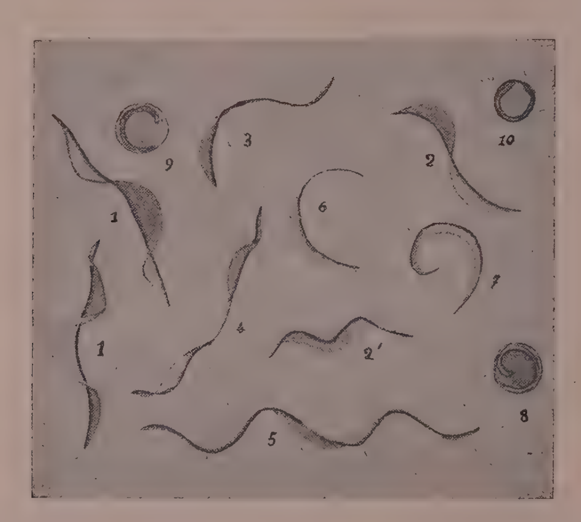
PARASITOLOGIE. — *Présence d'un Spirochétoïde nouveau*, Cristispirella caviæ *n. g., n. sp., à membrane ondulante très développée, dans l'intestin du Cobaye*. Note de M. **A.-Ch. Hollande**, présentée par M. Henneguy.

J'ai observé à diverses reprises en *Savoie* (*Chambéry*) dans l'intestin de plusieurs Cobayes morts d'infection indéterminée, un Spirochétoïde qui, par ses caractères particuliers, s'écarte des espèces actuellement signalées. Ce parasite, qui n'est peut-être pas pathogène, existait dans le contenu de l'intestin grêle à l'état de culture pure, et se retrouvait également dans le gros intestin.

Caractères. — Le parasite est essentiellement constitué par un fin filament axial, non rectiligne, très flexible, décrivant deux ou trois larges courbures; sur un des bords du filament, et dans un même plan, s'insère une membrane ondulante bien développée et très visible (*fig.* 1 et 3). Le corps du Spirochétoïde mesure de 9^{μ} à 12^{μ}; sa largeur (filament axial et membrane ondulante compris), atteint $1^{\mu},50$ à 2^{μ}; les courbures sont de 4^{μ} en moyenne.

Le filament axial (frottis desséchés fixés à l'alcool-éther ou frottis humides

exposés aux vapeurs d'acide osmique) se colore uniformément en rouge violacé par les éosinates à la soude du bleu de méthylène [1], comme la chromatine des noyaux des Métazoaires; la substance chromatique (noyau?) de ce filament est continue, non cloisonnée et ne décrit pas de lignes échelonnées comme chez les *Cristispira*, Spirochétoïdes des Mollusques.



Divers stades de *Cristispirella caviæ* n. g.; n. sp. — 1, 2, 2', formes libres; 3, 4, 5, formes en voie de division transversale; 6, 7, début de l'enkystement; 8, 9, deux stades de l'enkystement; 10, kyste formé; c. cl. × 2,250.

Le filament axial est peu visible après coloration à l'hématoxyline ferrique; je n'y ai pas vu tout autour de membrane périplastique différenciée.

La membrane ondulante apparaît en bleu pâle après coloration (voie lente) par les éosinates du bleu de méthylène; sa structure est homogène et formée d'un plasma à grains colloïdaux très fins; elle ne renferme aucun myonème ou autre différenciation striée; exceptionnellement, on peut y observer quelques petites inclusions de substance chromatinoïde (métachromatine?; *fig.* 2).

Les deux extrémités du parasite sont assez effilées; il n'y existe pas de grains basaux; la membrane ondulante s'y termine par un amincissement

(1) Cf. Hollande, *C. R. Soc. Biol.*, t. 79, 1916, p. 746.

progressif; je n'y ai vu aucun cil ou flagelle (ultra-microscope, méthode de Löffler).

Le filament axial peut parfois être contourné sur lui-même et décrire un ou deux tours de spire; la membrane ondulante suit alors ces déplacements (*fig.* 2).

Le parasite se déplace dans les deux sens, en avant et en arrière; au cours de sa progression, il décrit une rotation hélicoïdale, les ondulations de la membrane se dessinent et s'incurvent suivant la flexion du filament axial (*fig.* 1 et 2').

Multiplication. — On observe des individus de taille différente; les plus petits dérivent des plus grands par division transversale et non longitudinale. Précédant la division, on voit apparaître vers le milieu du filament axial (*fig.* 3) un épaississement de la substance chromatique, celui-ci se divise ensuite en deux granules (*fig.* 5), puis l'étirement de l'individu se produit (*fig.* 4); en ce point la membrane ondulante s'amincit et bientôt les deux individus formés se séparent. Ce mode de division est semblable à celui de *Spirochæta plicatilis*.

Spores. — Je n'ai pas observé la formation d'éléments coccoïdes aux dépens du filament axial qui puissent être interprêtés comme des spores.

Enkystement. — Le Spirochétoïde est capable de s'enkyster; son corps prend alors la forme d'un C (*fig.* 6), puis s'enroule comme un ressort de montre (*fig.* 7); il sécrète en même temps une substance sidérophile d'où naît la membrane kystique (*fig.* 8 et 9). Le kyste formé est circulaire et mesure $1^{\mu},50$ à 2^{μ}.

La morphologie de ce parasite rappelle celle des *Cristispira* des Mollusques (sensu Gross, 1912) par le mode d'insertion de la membrane ondulante; elle en diffère par l'absence de cloisonnement du filament axial et des myonèmes de la membrane ondulante; son hôte, ses petites dimensions propres (12^{μ} au lieu de 70^{μ}) l'en écartent également. Par ses processus de division (formation de grains chromatiques) il présente des affinités avec les *Spirochæta* (sensu Zuelzer, 1911), mais s'en éloigne par sa membrane ondulante flexible et non rigide.

Je propose de désigner ce Spirochétoïde du Cobaye sous le nom de *Cristispirella caviæ*, formant ainsi le nouveau genre *Cristispirella*, dont les caractères se résumeraient ainsi :

Petit Spirochétoïde à filament axial très fin, chromatique, flexible, décrivant deux ou trois larges courbures, ayant une membrane ondulante bien développée, déformable

et non rigide, sans myonèmes, située généralement dans le même plan que le filament axial; absence de grains basaux et de flagelles ou cils aux deux extrémités du corps; division transversale précédée de la formation de granules chromatiques spéciaux; enkystement possible.

Il semble que l'on doive ranger également dans le genre *Cristispirella* l'espèce de l'intestin de l'Annelide marine *Polydora flava* Clpde, observée et décrite par Mesnil et Caullery (1916) sous le nom de *Cristispira polidoræ* [1].

BACTÉRIOLOGIE. — *Sur l'épuration bactérienne et colibacillaire au cours du traitement des eaux d'égouts par le procédé des « boues activées ».* Note de MM. **Paul Courmont**, **A. Rochaix** et **F. Laupin**, présentée par M. Widal.

Dans une Note précédente [2], nous avons montré qu'en prolongeant pendant longtemps l'aération des eaux d'égouts, en présence des *boues activées*, en les soumettant à une *aération prolongée*, on obtient une diminution considérable du nombre total des germes.

I. Nous avons repris la question de *l'épuration bactérienne au cours de l'épuration normale* (temps strictement nécessaire à la disparition de l'ammoniaque); car les résultats indiqués par les auteurs sont contradictoires : 95 pour 100 de réduction du nombre total des germes (Russel et Bartow); 97 pour 100 (Hatton); 98 à 99 pour 100 (Ardern); 50 pour 100 (Dienert), etc.

Expériences. — De l'eau d'égout, en quantité variant de 1^l à 6^l, est mise en contact avec $\frac{1}{5}$ de son volume de boue activée; le mélange est aéré jusqu'à la disparition de l'ammoniaque.

Une numération bactérienne est faite dans l'eau d'égout brute après repos, et une autre dans l'effluent décanté après aération et sédimentation des boues.

Nous avons utilisé la méthode classique de numération sur gélatine en boîtes de Pétri, après dilution à 1 pour 100000. Les numérations sont faites chaque jour, jusqu'au quinzième jour.

Si la liquéfaction de la gélatine se produit avant ce terme, on utilise les tables de Vincent.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

---

(1) *Comptes rendus de la Société de Biologie*, 16 décembre 1916.

(2) *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 75.

	Durée d'aération.	Nombre de germes aérobies au centimètre cube. Sewage brut.	Effluent.
1re expérience	6h	5480000	4620000
2e »	5	4600000	2500000
3e »	5	7400000	3300000
4e »	6	4100000	4300000
5e »	6	17200000	8630000

Dans trois autres expériences, la numération a été rendue impossible par l'envahissement rapide de la gélatine par les germes liquéfiants.

Dans une expérience (exp. 4) la diminution des germes a été nulle. Dans les autres, nous avons obtenu successivement les chiffres de 16, 46, 56 et 52 pour 100 de réduction du nombre total des germes.

Conclusions. — L'épuration bactérienne du sewage traité par le procédé des boues activées est un phénomène irrégulier. Elle n'est jamais poussée très loin. On n'obtient une épuration bactérienne véritable qu'en prolongeant longtemps l'aération (plusieurs semaines) comme nous l'avons montré précédemment (1).

II. *Disparition du colibacille.* — Nous avions de même montré que l'aération prolongée en présence des boues activées amenait la disparition du colibacille.

Nous avons étudié le sort de cette bactérie dans les eaux d'égouts soumises aux conditions normales d'épuration (jusqu'à la disparition complète de l'ammoniaque) et d'autre part dans une eau d'égout soumise à l'aération prolongée en dehors de la présence des boues activées.

La recherche et l'isolement du colibacille a été faite par le procédé au rouge neutre, suivant la méthode de Rochaix. Les microbes isolés étaient caractérisés, outre leurs caractères morphologiques et de coloration, par les réactions biochimiques suivantes : réaction du rouge neutre, virage de la gélose lactosée et tournesolée, recherche de l'indol.

1° Pour les eaux d'égouts aérées en présence de boues activées jusqu'à la disparition de l'ammoniaque (conditions habituelles de l'épuration), nous avons obtenu les résultats suivants :

---

(1) *Loc. cit.*

	Temps d'aération.	Nombre de colibacilles par litre.	
		Sewage brut.	Effluent.
1re expérience	6h	800000	200000
2e »	5	200080	250000
3e »	5	500000	200000
4e »	6	50000	50000
5e »	6	200000	100000
6e »	6	100000	100000
7e »	5	250000	200000
8e »	5	500000	100000

2° Pour les eaux d'égouts, soumises à l'aération prolongée en dehors de la présence des boues activées, le courant d'air a passé pendant 32 jours, sans boues activées.

Le résultat a été le suivant :

	Sewage brut.	Effluent.
Colibacilles au litre	100000	5000

Conclusions. — La diminution du colibacille au cours de l'épuration normale par le procédé des *boues activées* est un phénomène essentiellement variable.

Le maximum d'épuration colibacillaire, atteint dans l'expérience 8, a été de 80 pour 100; dans d'autres, le nombre a été sensiblement égal avant et après le traitement. La disparition du colibacille est donc un phénomène irrégulier, souvent peu marqué. L'aération prolongée, sans boues activées, produit une diminution beaucoup plus sensible : elle atteint 95 pour 100. Pour obtenir la disparition complète du microbe, il faut utiliser l'aération prolongée en présence des boues activées, comme nous l'avons montré antérieurement.

A 15 heures trois quarts, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures et demie.

É. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de mai 1921 (*suite et fin*).

Problèmes et exercices d'Électricité générale, par P. Janet. Paris, Gauthier-Villars, 1921; 1 vol. 23^{cm}.

Les gazogènes de l'Économie du combustible, par Aimé Witz. Paris, J.-B. Baillière, 1921; 1 vol. 19^{cm}.

Principes de Biologie végétale, par Noël Bernard. Paris, Félix Alcan, 1921; 1 vol. 19^{cm}. (Présenté par M. Costantin.)

Études de Lépidoptérologie comparée, par Charles Oberthür. Fascicule IX (2e Partie), mai 1914; fascicule XVII, novembre 1920; fascicule XVIII (1re Partie), mai 1921. Rennes, Oberthür; 3 vol. 25^{cm}. (Présentés par M. Bouvier.)

Faune malacologique terrestre et fluviatile des îles Mascareignes, par Louis Germain. Angers, Gaultier et Thébert, 1921; 1 vol. 25^{cm}. (Présenté par M. Joubin.)

L'élevage industriel des Salmonidés, par Eugène Juillerat. Paris, Delagrave, 1921; 1 vol. 19^{cm}.

Œuvres de G.-H. Halphen, publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, Émile Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. Paris, Gauthier-Villars, 1921; 1 vol. 25^{cm}.

L'effort du réseau du Nord pendant et après la guerre, par M. Javary. Lille, L. Danel, 1921; 1 vol. 25^{cm}. (Présenté par M. Tisserand.)

Fundamenta mathematicæ, rédigés par Stefan Mazurkiewicz et Wacław Sierpinski. Tomes I (1920) et II (1921). Warsawa, Université; 2 vol. 25^{cm}.

Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire, par M. Milankovitch. Paris, Gauthier-Villars, 1920; 1 vol. 24^{cm}.

« *Papyrus* » et papier de « *Papyrus* », par P. Ammann, Q. Aribert, C. Chalot, M. Denis, L. Vidal. Paris, E. Larose, 1921; 1 fasc. 25^{cm}.

Calcul des valeurs absolues, par D. Riabouchinsky. Copenhague, 1919; 1 fasc. 26^{cm}.

Tourne-t-elle? par Gustave Plaisant. Paris et Liége, Ch. Béranger, 1921; 1 vol. 19^{cm}.

Motion and hyperdimensions, by F. Tavani. Extrait de *The Philosophical Magazine*, avril 1921; 1 fasc. 22^{cm}.

Electrical engineering, by T.-F. Wall. Londres, Methuen, 1920; 1 vol. 23^{cm}.

Araldica Nicotianæ, pel G. Emilio Anastasia. Vol. I : *Testo*; vol. II : *Tavole illustrative*. Scafati, E. Fienga, 1914; 2 vol. 27^{cm}.

La classificazione dei Colori e delle Tinte col metodo di Ferraris Adolfo. Alessandria, Tipografia l'Economica, 1920; 1 fasc. 24^{cm}.

Jac. Berzelius Bref, publiées, au nom de l'Académie royale des Sciences de Suède, par H.-G. Söderbaum. Tome VII : *Lettres détachées* (1809-1847). Uppsala, Almquist et Wiksells, 1920; 1 vol. 23^{cm}.

Opere matematiche di Eugenio Beltrami, publicate per cura della Faculta di scienze della R. Università di Roma. Tome IV et dernier. Milan, Ulrico Hoepli, 1920; 1 vol. 29^{cm}.

ERRATA.

(Séance du 30 mai 1920.)

Note de M. *N.-A. Barbieri*, Étude anatomique sur la terminaison arétinienne du nerf optique dans la série animale :

Page 1377, ligne 12, *au lieu de* après un séjour plus prolongé, *lire* après un séjour le plus prolongé.

(Séance du 20 juin 1921.)

Note de M. *Émile Haug*, Sur la tectonique de la région littorale entre Saint-Cyr et Hyères (Var) :

Page 1553, ligne 9 en remontant, *au lieu de* anticlinal, *lire* synclinal.

FIN DU TOME CENT-SOIXANTE-DOUZIÈME.